РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

РІВНЕНСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ПЕДАГОГІЧНОЇ ОСВІТИ

БОМБА А.Я., БАРАНОВСЬКА І.А., СЕНЬ Я.Г.

Крок до олімпіади (арифметика для школярів)

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
РІВНЕНСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ПЕДАГОГІЧНОЇ ОСВІТИ

БОМБА А.Я., БАРАНОВСЬКА І.А., СЕНЬ Я.Г.

Крок до олімпіади

(арифметика для школярів)

Рівне – 2005

Бомба А.Я., Барановська І.А., Сень Я.Г. Крок до олімпіади (арифметика для школярів). – Рівне: РДГУ – РОІППО, 2005. – 58 с.

У посібнику представлено найбільш цікаві умови та розв’язки задач з арифметики різних етапів математичних олімпіад. Проведено їх умовний поділ як за тематичною ознакою, так і за рівнем складності для учнів 8 – 11 класів. Причому класифікацію здійснено так, що кожен учень може розв’язувати задачі не лише “свого класу”, але й спробувати свої сили в задачах “наступного рівня”. Крім того при підборі умов та формуванні розв’язків задач переслідувалась мета можливого їх узагальнення та подальшого використання при розробці тематики учнівських досліджень (зокрема в рамках МАН).

Призначений для підготовки школярів до участі в математичних конкурсах та олімпіадах, а також для всіх, хто цікавиться математикою.

Рецензенти: ***Б.П. Петрівський*** – кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Рівненського державного гуманітарного університету;

Л.В. Пекарська – методист кабінету математики Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти.

Рекомендовано до друку Вченою Радою Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти, протокол № 4 від 27 жовтня 2005 р.

ЗМІСТ

1. ЦІЛІ ЧИСЛА ІЗ ВКАЗАНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

1.1 8 клас

1) Фабрика випустила товар у пачках масою 3 кг і 5 кг. Довести, що з цих пачок можна скласти пачку будь-якої маси, більшої за 7 кг.

2) Два різних 100-цифрових числа записані за допомогою 40 одиниць, 30 двійок, 20 трійок і 10 четвірок. Довести, що ці числа не діляться одне на одне.

3) Нехай a, b, c, d – цілі числа. Довести, що вираз $((a-c)^2+(b-d)^2)(a^2+b^2)-(ad-bc)^2$ є квадратом деякого цілого числа.

4) Визначити, яке з чисел більше $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ (75 раз) чи $3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}$ (74 рази).

5) Знайти всі такі стоцифрові числа a, які задовольняють рівність: a="сума всіх цифр числа a"+"сума всіх попарних добутків цих цифр"+"сума всіх добутків по три цифри"+…+"добуток усіх цифр".

6) Знайти найменше натуральне число, яке при діленні на 4, 5, 9, 11 дає відповідно остачі 3, 4, 8, 10.

7) Довести, що коли принаймні одне з натуральних чисел a або b відмінне від 1, виконується нерівність $3(a^2+b^2)\geq 5(a+b)$.

8) На дошці було записано дію множення двох двоцифрових чисел. Учень замінив кожну цифру новою, більшою від попередньої на одне і те саме число. Ось що вийшло:

$$\begin{array}{r}
43\\
\underline{54}\\
64\\
\underline{85}\\
894
\end{array}$$

Що було записано на дошці спочатку?

1.2 9 клас

1) Знайти всі натуральні числа x, y, z, для яких $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ є цілим числом.

2) Квадратний тричлен ax^2+bx+c при всіх цілих х набуває цілих значень тоді і тільки тоді, коли числа $2a,\ a+b,\ c$ – цілі. Довести це.

3) З чисел, утворених перестановками перших 12 цифр 120-цифрового числа, взято будь-які 120 чисел. Довести, що їх сума ділиться на 120.
4) Довести, що існує нескінченна множина натуральних чисел, які не можна подати у вигляді $\sum_{i=1}^{7} a_i^6$, де a_i – натуральні числа.
5) При яких натуральних значеннях n число $2^n + 65$ є квадратом цілого числа?
6) Довести, що множину чисел 1, 2, 3, …, 1413, 1414 можна розбити на підмножини так, щоб сума чисел у кожній підмножині дорівнювала 1981.
7) Для яких натуральних n число $a_n = 144...4$ є точним квадратом?
8) Знайдіть всі натуральні числа, які не можна представити у вигляді суми деяких послідовних натуральних чисел.

1.3 10 клас

1) Знайти трицифрове число, квадрат якого дорівнює п'ятому степеню суми його цифр.
2) У числі 2^{1970} закреслили першу цифру і додали її до числа, що залишилося. Такі самі операції застосовують до послідовних результатів доти, поки дістануть десятицифрове число. Довести, що в цьому десятицифровому числі є дві однакові цифри.
3) Для якого n-цифрового числа відношення цього числа до суми його цифр буде найбільшим?
4) Знайти всі натуральні числа n, для яких $3^n(n+1) > 4^n$.
5) Знайти всі цілі значення n, для яких число $(n+2)^4 - n^4$ є кубом цілого числа?
6) Довести, що при будь-якому натуральному nчисло $\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n}}}$ не є цілим.
7) Множина M складається з усіх чисел вигляду $x^2 + x$, де x – довільне натуральне число. Довести, що для кожного натурального $k \geq 2$ у множині M знайдуться такі різні між собою числа $a_1, a_2, ..., a_k$ і b_k, що $a_1 + a_2 + ... + a_k = b_k$.
8) Довести, що для будь-яких n різних натуральних чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ виконується нерівність

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \geq \frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{1 + 2 + ... + n}.$$

9) Розглянемо множину *M* натуральних чисел, які мають вигляд x^2+5y^2, де x і y – деякі цілі числа.

а) Доведіть, що добуток двох чисел з *M* також належить *M*.

б) Назвемо базисним число із *M* більше 1, яке не ділиться ні на одне з чисел з *M,* крім себе і 1. Чи існують числа із *M*, які можна двома різними способами представити у вигляді добутку базисних?

в) Доведіть, що базисних чисел нескінченна кількість.

1.4 11 клас

1) Знайти всі прості числа виду n^n+1, які менші за 10^{19} (n – натуральне число).

2) Кожне з чисел $N_1, N_2, \ldots, N_n$ є сумою квадратів двох чисел. Довести, що добуток $N_1 N_2 \ldots N_n$ також є сумою квадратів двох цілих чисел.

3) Нехай a і b – взаємно прості натуральні числа, причому $a>b$. Визначити, який вираз більший:

$$\sum_{k=1}^{b}\left[\frac{ka}{b}\right] \text{ чи } \sum_{k=1}^{a}\left[\frac{kb}{a}\right],$$

де $[x]$ – ціла частина числа x.

4) Для яких натуральних чисел k існують такі натуральні числа m і n, що m^k+n і n^k+m одночасно є k-ми степенями деяких натуральних чисел?

5) Довести, що число 101 не можна зобразити у вигляді суми 9 попарно взаємно простих натуральних чисел відмінних від 1.

6) Знайти цілу частину числа $\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}$ (знак кореня зустрічається 1987 разів).

Розв'язування задач

8 клас

1) Оскільки кожну масу, яка ділиться на 10, можна дістати з пачок по 5 кг, а кожну масу, яка ділиться на 3, – з пачок по 3 кг, то залишається переконатися, що можна дістати з пачок по 3 і 5 кг таку масу 8 кг, 11 кг, 13кг, 14 кг, 17 кг, а це випливає з рівностей: 8=3+5; 11=3·2+5; 13=3+5·2; 14=3·3+5; 17=3·4+5.

2) Позначимо ці числа через *M* і *N*. Сума цифр кожного з цих чисел дорівнює

$40\cdot 1+30\cdot 2+20\cdot 3+10\cdot 4=200.$ Оскільки кожне число при діленні на 9 дає таку саму остачу, яку дає при діленні на 9 сума його цифр, то числа M і N при діленні на 9 дають остачу 2. Нехай $N=9n+2.$ Припустимо, що число M ділиться на N. Тоді $M=pN=9np+2p$, де p - ціле число, причому $1<p\le 4$. Для того, щоб число M при діленні на 9 давало остачу 2, треба, щоб число $2p$ при діленні на 9 також давало остачу 2. Але для цілих p з проміжку $1<p\le 4$ це неможливо. Отже, припущення, що M ділиться на N, неправильне.

3) Маємо $((a-c)^2+(b-d)^2)(a^2+b^2)-(ad-bc)^2=(a^2+b^2-ac-bd)^2$. Оскільки a,b,c,d – цілі числа, то заданий вираз є квадратом цілого числа $a^2+b^2-ac-bd$.

4) Введемо такі позначення: $a=\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\}75\text{ раз},\quad b=\left.3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\right\}74\text{ рази}$.

Тоді $a=\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{16}}}}}\right\}72\text{ рази},\quad b=\left.3^{3^{\cdot^{\cdot^{3^{27}}}}}\right\}72\text{ рази}$. Оскільки $2^{16}<3^{27}$, то $2^{2^{16}}<3^{3^{27}}, 2^{2^{2^{16}}}<3^{3^{3^{27}}},\ldots$.

Отже $a<b$.

5) Нехай $a=\overline{b_1b_2...b_{100}}$. Тоді рівність, про яку йдеться в умові задачі, можна записати в такому вигляді: $b_1\cdot 10^{99}+b_2\cdot 10^{98}+...+b_{99}\cdot 10+b_{100}=(b_1+1)(b_2+1)(b_3+1)...(b_{100}+1)-1$. Оскільки кожна з цифр числа не перевищує 9, то для правої частини цієї рівності маємо

$$\begin{gathered}(b_1+1)(b_2+1)...(b_{100}+1)-1=b_1(b_2+1)...(b_{100}+1)+(b_2+1)...(b_{100}+1)-1\le\\ \le b_1\cdot 10^{99}+(b_2+1)...(b_{100}+1)-1=b_1\cdot 10^{99}+b_2(b_3+1)...(b_{100}+1)+\\ +(b_3+1)...(b_{100}+1)-1\le b_1\cdot 10^{99}+b_2\cdot 10^{98}+(b_3+1)...(b_{100}+1)-1\le...\le\\ \le b_1\cdot 10^{99}+b_2\cdot 10^{98}+...+b_{99}\cdot 10+b_{100}=a\end{gathered}$$

Очевидно, рівності будуть виконуватись тоді і тільки тоді, коли $b_2=b_3=...=b_{100}=9$. Отже, шукані числа мають вигляд $\overline{b_1\,99...9}$, де b_1 – довільна цифра, відмінна від 0.

6) Числа 4,5,9,11 взаємно прості, тому $4\cdot 5\cdot 9\cdot 11=1980$ – найменше число, яке ділиться на кожне з них. Якщо число a ділити на b, то число $a-1$ при діленні на b дає остачу $b-1$. Кожна з остач 3,4,8,10, про які йдеться в умові задачі, на 1 менша від відповідного дільника 4,5,9,11. Тому шукане число 1979.

7) Оскільки для всіх натуральних чисел $a\ge 2, b\ge 2$ виконуються нерівності $3a>5, 3b>5$, то для цих чисел виконуватимуться і нерівності $3a^2>5a, 3b^2>5b$. Додавши ці нерівності, дістанемо $3(a^2+b^2)>5(a+b)$. Якщо $a=1$, то дана в задачі нерівність перетворюється в нерівність $3b^2+3\ge 5b+5$. Неважко перевірити, що вона справджується для кожного натурального $b \geq 2$. Випадок $b=1$ розглядається аналогічно.

8) *<u>Перший спосіб</u>*. Оскільки у першому рядку зустрічається цифра 3, то числом, що додається до кожної із записаних цифр, може бути лише 0,1,2 або 3. Аналізуючи кожну з цих можливостей, переконуємося, що до кожної цифри учень додав число 2.

<u>Другий спосіб</u>. Позначимо число, що додається до кожної із записаних цифр через a. Бачимо, що при додаванні цифр другого розряду, переносу в старший розряд не було. Отже $(6-a)+(5-a)=9-a$, звідки $a=2$.

9 клас

1) *<u>Вказівка</u>*. Нехай $x \leq y \leq z.$ Доведіть спочатку, що $x<3$. Шуканими трійками чисел є (1,1,1); (3,3,3); (2,4,4); (2,3,6); (1,2,2).

2) Нехай квадратний тричлен $p(x)=ax^2+bx+c$ при всіх цілих x набуває цілих значень. Якщо x=0, то $p(0)=c$ – ціле число. За умовою задачі $p(1)=a+b+c$ – також ціле число. Оскільки c – ціле число, то й $a+b$ – ціле число. Розглянемо тепер $p(2)=4a+2b+c=2a+2(a+b)+c.$ Оскільки $a+b,\ c$ і $p(2)$ – цілі числа, то $2a$ – ціле число. Отже, якщо $p(x)$ при всіх цілих x набуває цілих значень, то $c,\ a+b,\ 2a$ – цілі числа. Доведемо, що ці умови й достатні, тобто, якщо $c,\ a+b,\ 2a$ – цілі числа, то $p(x)$ при всіх цілих x набуває цілих значень. Зауважимо, що $p(x+1)-p(x)=2ax+a+b.$ Якщо $2a$ і $a+b$ – цілі числа, то з цієї рівності випливає, що для кожного цілого x, для якого $p(x)$ – ціле число, $p(x+1)$ також буде цілим. За умовою $p(0)=c$ – ціле число. Тому $p(1),\ p(2)$ і, взагалі, $p(x)$ при цілому x є цілими числами.

3) Будь-яке ціле число при діленні на 3 дає таку саму остачу, яку при діленні на 3 дає сума його цифр. Позначимо вибрані числа через $M_1,\ M_2,\ M_3\ ,...,\ M_{120}$. Суму цих чисел можна записати так:

$$M_1+M_2+M_3+...+M_{120}=(M_1-M_2)+2(M_2-M_3)+$$
$$+3(M_3-M_4)+...+119(M_{119}-M_{120})+120M_{120}. \qquad (1)$$

Через те, що кожне з чисел $M_1,\ M_2,\ M_3,\ ...,\ M_{120}$ записується одними й тими самими цифрами, то суми цифр кожного з цих чисел однакові. Тоді кожне з цих чисел при діленні на 3 дає одну й ту саму остачу. Отже, різниця таких чисел ділиться на 3. Але в кожного числа M_i останні 108 цифр однакові. Тому різниця будь-яких двох таких чисел ділиться на 10^{108}, а отже, ділиться і на 40. Оскільки різниця будь-яких двох чисел $M_i (i=1,2,...,120)$ ділиться на 3 і на 40, то вона ділиться на 120. Таким чином, кожен доданок правої частини рівності (1) ділиться на 120, отже, сума $M_1+M_2+M_3+...+M_{120}$ також ділиться на 120.

4) Кожне натуральне число *a* можна записати у вигляді $a=3m+\alpha$, де *m* – ціле число, а α дорівнює 0, 1 або –1. Тоді

$$a^6=(3m+\alpha)^6=9(81m^6+162m^5\alpha+135m^4\alpha^2+60m^3\alpha^3+$$
$$+15m^2\alpha^4+2m\alpha^5)+\alpha^6.$$

Таким чином, шостий степінь будь-якого натурального числа або ділиться на 9, або при діленні на 9 дає в остачі 1. Тому числа виду $a_1^6+a_2^6+...+a_7^6$ при діленні на 9 дають остачу, яка не більша за 7. Отже числа виду $9n+8$ не можна подати у вигляді суми $a_1^6+a_2^6+...+a_7^6$, оскільки при діленні на 9 вони дають остачу 8. Числа виду $9n+8$ утворюють нескінченну множину.

5) Число *n* неодмінно повинно бути парним. Справді, якщо *n* непарне, то останньою цифрою числа 2^n буде 2 або 8. Тоді останньою цифрою числа 2^n+65 буде 7 або 3, а квадрат цілого числа не може закінчуватись жодною з цих двох цифр. Отже, $n=2k$, де *k* – натуральне число. Якщо $2^{2k}+65$ квадрат натурального числа *a*, то $a=2^k+\alpha$, де $\alpha\geq1$. Звідси відразу випливає, що $k\leq5$. Справді, якщо $k\leq6$, то $a^2=(2^k+\alpha)^2\geq(2^k+1)^2=2^{2k}+2^{k+1}+1>2^{2k}+65$. Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що з п'яти чисел, які лишились (*k*=1, 2, 3, 4, 5), квадратами є: $81=2^4+65, 1089=2^{10}+65$.

6) Знайдемо спочатку всі можливі двоелементні підмножини. Кожна така підмножина повинна містити числа 1414–*k* і 567+*k*, де *k* – певне ціле число. Неважко переконатись, що *k* може приймати значення 0, 1, 2,….423. Числа 1, 2,…,566 залишаться ще невикористаними. Оскільки 1981=567+707+707 і (353–*k*)+(354+*k*)=707, то розглянемо шістки чисел виду $\{566-n, 1+n, 353-2n, 354+2n, 352-2n, 355+2n\}$, де $0\leq n\leq70$. Дві різні такі шістки не мають спільних чисел, і сума чисел в кожній шістці дорівнює 1981. У нас залишаються ще всі цілі числа від 72 до 211. Вони розбиваються на 70 пар виду $\{72+k, 211-k\}, 0\leq k\leq69$, причому сума чисел кожної пари дорівнює 283. Крім того, $1981=283\cdot7$. Тому, групуючи по 7 таких пар в одну множину, ми дістанемо ще 10 підмножин з сумою чисел, що дорівнює 1981.

7) Точними квадратами будуть тільки числа $a_2=144=12^2$ і $a_3=1444=38^2$. Число $a_1=14$ не є точним квадратом. Доведемо, що для кожного $n>3$ число a_n теж не буде точним квадратом. Справді, припустимо, що існує таке натуральне число k, що $a_n = k^2$. Запишемо a_n у вигляді

$$a_n = a_{n-3} \cdot 1000 + 444. \qquad (1)$$

Очевидно, a_n ділиться на 4. Крім того, перший доданок правої частини ділиться на 16 (для $n > 3$ число a_{n-3} парне, а 1000 ділиться на 8), другий доданок на 16 не ділиться. Тому a_n теж не буде ділитись на 16. Отже, k повинно бути парним числом, яке не буде ділитись на 4, тобто k має вигляд $k = 4m + 2$. З рівності $a_n = k^2 = (4m+2)^2 = 16m^2 + 16m + 4$ випливає, що a_n при діленні на 16 дає в остачі 4. Але з (1) видно, що при діленні на 16 число a_n дає таку саму остачу, як і число 444, тобто 12. Одержана суперечність доводить, що $n > 3$ число a_n точним квадратом не буде.

8) Всього існує 900 трицифрових чисел. Позначимо ці числа $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$, де n=900. Випишемо їх можливі попарні добутки:

$$x_1 \cdot x_1,\ x_1 \cdot x_2,\ x_1 \cdot x_3, \ldots,\ x_1 \cdot x_{n-1},\ x_1 \cdot x_n;$$
$$x_2 \cdot x_2,\ x_2 \cdot x_3, \ldots,\ x_2 \cdot x_{n-1},\ x_2 \cdot x_n;$$
$$x_3 \cdot x_3, \ldots,\ x_3 \cdot x_{n-1},\ x_3 \cdot x_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n-1} \cdot x_{n-1},\ x_{n-1} \cdot x_n;$$
$$x_n \cdot x_n$$

Неважко підрахувати кількість виписаних добутків. Вона, очевидно, дорівнює

$$n + (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{900 \cdot 901}{2} = 405450.$$

Серед цих добутків можуть бути п’ятицифрові числа (наприклад, 100·100=10000), деякі з добутків можуть дорівнювати один одному, (наприклад, 600·600=400·900). Отже, кількість шестицифрових чисел, які представлені у вигляді добутку двох трицифрових чисел, менша ніж 405450. Кількість всіх шестицифрових чисел дорівнює 900000. Тому кількість шестицифрових чисел, які не представлені у вигляді добутку трицифрових чисел, більша ніж 900000-405450=494550, тобто більша ніж кількість чисел, які мають вигляд добутку двох трицифрових чисел.

10 клас

1) Позначимо шукане число через N. Оскільки N – трицифрове число, то його можна записати у вигляді

$$N = 100a + 10b + c\,. \qquad (1)$$

За умовою задачі

$$N^2 = (a+b+c)^5\,. \qquad (2)$$

Звідси

$$N = (a+b+c)^2\sqrt{a+b+c}\,. \qquad (3)$$

З цієї рівності випливає: якщо таке число N існує, то сума його цифр $(a+b+c)$ повинна бути повним квадратом деякого цілого числа. Через те, що N – трицифрове число, то справджуються такі нерівності: $100 \le N \le 1000$. Беручи до уваги рівність (2), отримуємо $5 < 10^{\frac{4}{5}} \le a+b+c = N^{\frac{2}{5}} < 10^{\frac{6}{5}} < 16$. Оскільки $(a+b+c)$ є повним квадратом цілого числа і між числами 5 і 16 таким є тільки число $9 = 3^2$, то $a+b+c = 9$. Підставляючи це значення в (3), знаходимо $N = 243$.

2) Припустимо, що утворене десятицифрове число записується різними цифрами. Тоді в його записі будуть використані всі цифри 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, сума яких дорівнює 45. Отже, це число ділиться на 3. Доведемо, що це не так. Зазначимо, що число 2^{1970} не ділиться на 3. Доведемо, що на 3 не може ділитись і кожне наступне число, яке утворюється в результаті операції, зазначеної в задачі. Початкове число α_0 (в задачі 2^{1970}) має вигляд $\alpha_0 = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$. Після зазначеної операції нове число матиме вигляд $\alpha_1 = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + ... + a_{n-1} \cdot 10 + a_n + a_0$. Різниця цих чисел $\alpha_0 - \alpha = a_0(10^{12} - 1)$ ділиться на 3. Оскільки $\alpha_0 = 2^{1970}$ не ділиться на 3, то α також не ділиться на 3. Отже, весь час дістаємо числа, які не діляться на 3. Твердження задачі доведено.

3) Відношення n-цифрового числа до суми його цифр буде набувати найбільшого значення, яке дорівнює 10^{n-1}, тоді і тільки тоді, коли всі цифри цього числа, крім першої, є нулями.

4) Перевіркою переконаємось, що для n=1,2,…,7 нерівність виконується, а для n=8 – ні. Методом математичної індукції доведемо, що вона не виконується і для всіх $n > 8$. Справді, припустимо, що для довільного фіксованого $n = k \ge 8$ виконується протилежна нерівність $(k+1) \cdot 3^k \le 4^k$. Тоді

$$4^{k+1} = 4 \cdot 4^k \ge 4(k+1) \cdot 3^k = \frac{4}{3}(k+1) \cdot 3^{k+1} = (k + \frac{1}{3}k + \frac{4}{3}) \cdot 3^{k+1} \ge (k+2) \cdot 3^{k+1}\,.$$

Таким чином, протилежна нерівність виконується також для $n = k+1$, а тому і для всіх $n \ge 8$.

5) $(n+2)^4 - n^4 = 8((n+1)^3 + (n+1)) = 2^3(k^3 + k)$, де $k = n+1$. Отже, число $k^3 + k$ теж повинно бути кубом цілого числа. Розглянемо спочатку випадок $k>0$. Якщо k^3+k – куб числа a, то a=k+s, де $s\geq 1$. Але $(k+s)^3 \geq (k+1)^3 > k^3+k$. Випадок $k>0$ розглядається аналогічно. Якщо $k=0$, тобто $n=-1$, то $(-1+2)^4-(-1)^4=0^3$. Отже, дане число буде кубом тільки для $n=-1$.

6) Припустимо протилежне: нехай при деякому $n\in N$ число $\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n}}}=m$ буде натуральним. Тоді числа $\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n}}=m^3-n=k, \sqrt[3]{n}=k^3-n=l$ – також натуральні. Маємо далі $n=l^3, \sqrt[3]{l^3+l}=k$, і, отже, $l^3+l=k^3$ для деяких натуральних чисел l і k таких, що $l<k$. Крім того, при будь-якому натуральному l виконуються нерівності $l^3<l^3+l<(l+1)^3$, а тому вираз l^3+l не може бути точним кубом натурального числа. Суперечність доводить твердження задачі.

7) Доведемо методом математичної індукції за числом k. При $k=2$ візьмемо $a_1=3^2+3=12, a_2=5^2+5=30$ тоді $a_1+a_2=42=6^2+6=b_2$. Припустимо, що для $k=n$ твердження задачі справджується, тобто $a_1,a_2,...a_n,b_n\in M$, причому $b_n=a_1+a_2+...+a_n$, і доведемо, що воно справджується для $k=n+1$. Розглянемо числа $a_1,a_2,...,a_n,a_{n+1},b_{n+1}$, де $a_{n+1}=\left(\frac{b_n-2}{2}\right)^2+\frac{b_n-2}{2}, b_{n+1}=\left(\frac{b_n}{2}\right)^2+\frac{b_n}{2}$. Числа a_{n+1} і b_{n+1} належать до множини M, бо числа $\frac{b_n-2}{2}$ і $\frac{b_n}{2}$ натуральні (оскільки $x^2+x=x(x+1)$, то всі числа із M парні, а $b_n\in M$ за припущенням). Крім того, $a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}=b_n+\left(\frac{b_n-2}{2}\right)^2+\frac{b_n-2}{2}=\left(\frac{b_n}{2}\right)^2+\frac{b_n}{2}=b_{n+1}$. Залишається довести, що всі числа $a_1,a_2,...,a_n,...,b_1,b_2,...,b_n,...$ різні між собою. Доведемо спочатку методом математичної індукції, що $b_n>6\ (n=2,3,...)$. Маємо $b_2=42>6$; якщо $b_n>6$, то $b_{n+1}=\left(\frac{b_n}{2}\right)^2+\frac{b_n}{2}>3^2+3>6$. Тепер отримуємо

$$b_{n+1}=\left(\frac{b_n}{2}\right)^2+\frac{b_n}{2}=\frac{b_n(b_n+2)}{4}>\frac{8b_n}{4}=2b_n>b_n.$$

Отже послідовність $b_2,b_3,...,b_n,...$ зростає, а тому всі її члени різні між собою. Аналогічно $a_{n+1}=\frac{(b_n-2)b_n}{4}>b_n=a_1+a_2+...+a_n>a_n$. Отже, всі члени послідовності $a_1,a_2,...,a_n,...$також різні між собою. Упевнимось, нарешті, що для будь-яких значень n і k маємо $a_n\neq b_k$. Справді, якщо $k\geq n$, то $b_k>b_{k-1}>...>b_n=a_1+a_2+...+a_n>a_n$. Якщо ж $k<n$, то $a_n>b_{k-1}>...>b_k$. Твердження задачі повністю доведено.

8) Введемо такі позначення: $A=\{a_1,a_2,...,a_n\},\ N=\{1,2,...,n\}$, k – кількість тих чисел множини A, які більші n (а самі ці числа позначимо $b_1,b_2,...,b_n$). Позначимо через $c_1,c_2,...,c_{n-k}$ ті числа з множини A, що не перевищують числа n , а через $d_1,d_2,...,d_k$ ті числа з множини N, що не увійшли до набору $c_1,c_2,...,c_{n-k}$. Тоді

$$A=\{c_1,c_2,...,c_{n-k},b_1,b_2,...,b_k\},$$
$$N=\{c_1,c_2,...,c_{n-k},d_1,d_2,...,d_k\}.$$

Згідно з вибором чисел c_i,b_j,d_i, маємо $b_j>n,\ d_i\le n,\ c_i\le n$. Тому для цих чисел виконуються нерівності: $b_j>d_i,\ b_j^2>nb_j,\ d_i^2\le nd_i,\ c_i-n\le 0$. Звідси отримаємо

$$\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{a_1+a_2+...+a_n}=\frac{c_1^2+c_2^2+...+c_{n-k}^2+b_1^2+b_2^2+...+b_k^2}{c_1+c_2+...+c_{n-k}+b_1+b_2+...+b_k}\ge$$
$$\ge\frac{c_1^2+c_2^2+...+c_{n-k}^2+n(b_1+b_2+...+b_k)}{c_1+c_2+...+c_{n-k}+b_1+b_2+...+b_k}=$$
$$=n+\frac{c_1(c_1-n)+c_2(c_2-n)+...+c_{n-k}(c_{n-k}-n)}{c_1+c_2+...+c_{n-k}+b_1+b_2+...+b_k}\ge$$
$$\ge n+\frac{c_1(c_1-n)+c_2(c_2-n)+...+c_{n-k}(c_{n-k}-n)}{c_1+c_2+...+c_{n-k}+d_1+d_2+...+d_k}=$$
$$=\frac{c_1^2+c_2^2+...+c_{n-k}^2+n(d_1+d_2+...+d_k)}{c_1+c_2+...+c_{n-k}+d_1+d_2+...+d_k}\ge$$
$$\ge\frac{c_1^2+c_2^2+...+c_{n-k}^2+d_1^2+d_2^2+...+d_k^2}{c_1+c_2+...+c_{n-k}+d_1+d_2+...+d_k}=\frac{1^2+2^2+...+n^2}{1+2+...+n},$$

що й треба було довести.

9) а) Нехай $k=a^2+5b^2$ і $l=c^2+5d^2$ – два довільних числа із множини M. тоді $kl=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)=(ac-5bd)^2+5(ad+bc)^2$. Таким чином, $kl=x^2+5y^2$, де $x=ac-5bd$, $y=ad+bc$, тобто число kl належить M.

б) Так, існують. Наприклад, $84=4\cdot 21=6\cdot 14$.Покажемо, що всі п’ять виписаних чисел належать множині M:

$4=2^2+5\cdot 0^2$, $6=1^2+5\cdot 1^2$, $14=3^2+5\cdot 1^2$, $21=4^2+5\cdot 1^2$, $84=2^2+5\cdot 4^2$.

Для того, щоб показати, що числа 4, 6, 14, 21 – базисні, випишемо всі числа із M, більші за 1, але менші 21: 4, 5, 6, 9, 14, 16, 20, 21. Серед них всі, крім 16, 20 – базисні, бо кожне з них не ділиться ні на одне з попередніх.

в) Припустимо протилежне, що базисних чисел скінченна кількість: $b_1,b_2,\ldots,b_n$. Тоді число $1+5(b_1,b_2,\ldots,b_n)^2$, очевидно, з множини M, оскільки воно не ділиться ні на одне з чисел $b_1,b_2,\ldots,b_n$, а тому є базисним і не дорівнює $b_1,b_2,\ldots,b_n$. Отримали суперечність.

11 клас

1) 2, 5, 257.

2) Легко перевірити безпосередньо, що

$$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)=(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2. \qquad (1)$$

Отже, твердження задачі справедливе при $n=2$. Припустимо тепер, що твердження справедливе для довільного фіксованого $n=k(k\geq 2)$, тобто, що $N_1N_2...Nk=A_k^2+B_k^2$, де A_k і B_k – цілі числа. Якщо $N_{k+1}=a_{k+1}^2+b_{k+1}^2$, де a_{k+1} і b_{k+1} – цілі числа, то, згідно з рівністю (1)

$$(N_1N_2...N_k)N_{k+1}=(A_k^2+B_k^2)\cdot(a_{k+1}^2+b_{k+1}^2)=(A_ka_{k+1}-B_kb_{k+1})^2+$$
$$+(A_kb_{k+1}+B_ka_{k+1})^2=A_{k+1}^2+B_{k+1}^2,$$

де A_{k+1} і B_{k+1} – цілі числа. Отже, твердження справедливе і для $n=k+1$. Тому, згідно з принципом математичної індукції, воно справедливе для кожного натурального числа $n\geq 2$.

Зауваження. Читач, знайомий з комплексними числами, легко побачить у рівності (1) твердження, що добуток норм двох комплексних чисел $z_1=a_1+b_1i$ та $z_2=a_2+b_2i$ дорівнює нормі добутку $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$ цих чисел (нормою комплексного числа $z=a+bi$ називається число a^2+b^2).

3) *Перший спосіб*. Доведемо спочатку таке твердження: якщо числа a і b – взаємно прості, то числа $a,2a,3a,...,ba$ дають різні остачі при діленні на b (аналогічно числа $b,2b,3b,...,ab$ дають різні остачі при діленні на a). Припустимо протилежне. Нехай ka і ma $(1\leq k\leq m\leq b)$ дають однакові остачі при діленні на b. Тоді $(m-k)a$ ділиться на b без остачі. Проте це неможливо, бо $0<m-k<b$, а найменше спільне кратне взаємно простих чисел a і b дорівнює ab. З доведеного твердження випливає, що сума дробових частин чисел $\frac{a}{b},\frac{2a}{b},\frac{3a}{b},...,\frac{ba}{b}$ дорівнює

$$\frac{1}{b}+\frac{2}{b}+\frac{3}{b}+...+\frac{b-1}{b}=\frac{b-1}{2}.$$

Кожне число є сумою своєї цілої і дробової частини, тому

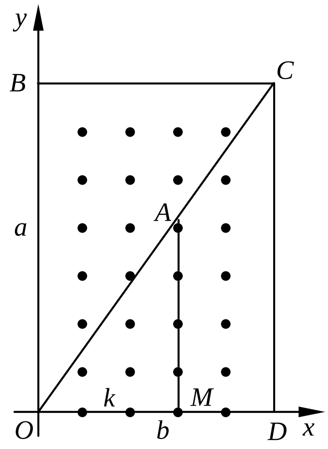
$$\sum_{k=1}^{b}\left[\frac{ka}{b}\right]=\sum_{k=1}^{b}\frac{ka}{b}-\frac{b-1}{2}=\frac{a(b+1)}{2}-\frac{b-1}{2}=\frac{ab+a-b+1}{2}.$$

Аналогічно $\sum_{k=1}^{a}\left[\frac{kb}{a}\right]=\frac{ab+b-a+1}{2}$. Отже, $\sum_{k=1}^{b}\left[\frac{ka}{b}\right]-\sum_{k=1}^{a}\left[\frac{kb}{a}\right]=a-b$, тобто перша сума більша, ніж друга.

Другий спосіб. Розглянемо на координатній площині *XOY* прямокутник *OBCD* (мал.1), в якого *OB*=*a* і *OD*=*b*. Відмітимо усі внутрішні точки цього прямокутника, обидві координати яких виражаються цілими числами.

Очевидно, таких точок буде $(a-1)(b-1)$.

Проведемо діагональ OC прямокутника $OBCD$. Доведемо, що OC не проходить через жодну з зазначених точок. Для довільної точки (x, y) діагоналі OC маємо $\frac{y}{x}=\frac{CD}{OD}=\frac{a}{b}$. Натуральні числа a і b взаємно прості, а це й означає, що не існує цілих натуральних чисел $y<a$ і $x<b$, для яких $\frac{y}{x}=\frac{a}{b}$. Отже, x і y не можуть одночасно бути цілими числами. Розглянемо точку A на діагоналі OC з абсцисою, що дорівнює k, де k – натуральне число ($k<b$). Нехай $OM=k$. Кількість точок, що лежать на відрізку AM і мають цілу ординату, очевидно дорівнює цілій частині відрізка AM. У свою чергу $\frac{AM}{OM}=\frac{a}{b}$, звідки $AM=\frac{ka}{b}$ і, отже, кількість таких точок дорівнює $\left[\frac{ka}{b}\right]$. Неважко помітити, що сума



Мал. 1.

$\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{2a}{b}\right]+\ldots+\left[\frac{(b-1)a}{b}\right]$ дорівнює загальному числу усіх точок з цілими координатами, які містяться під діагоналлю OC. Виходячи з симетрії розміщення відмічених точок відносно прямокутника $OBCD$ і з того, що на діагоналі OC немає жодної з цих точок, матимемо, що

$$\sum_{k=1}^{b}\left[\frac{ka}{b}\right]=\sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{ka}{b}\right]+a=\frac{(a-1)(b-1)}{2}+a. \qquad (1)$$

Аналогічно доводиться рівність

$$\sum_{k=1}^{a}\left[\frac{kb}{a}\right]=\frac{(a-1)(b-1)}{2}+b. \qquad (2)$$

З рівностей (1) і (2) отримаємо $\sum_{k=1}^{b}\left[\frac{ka}{b}\right]-\sum_{k=1}^{a}\left[\frac{kb}{a}\right]=a-b$. Оскільки $a>b$, то перша сума більша, ніж друга.

4) Якщо $k=1$, то числа m і n можуть бути довільними. Якщо $k\geq 2$, то таких натуральних чисел не існує. Справді, припустимо, що це не так. Тоді існує таке натуральне число $p\geq 1$, для якого $m^k+n=(m+p)^k$. Звідси отримаємо

$$\begin{aligned}n&=(m+p)^k-m^k=((m+p)-m)(m+p)^{k-1}+(m+p)^{k-2}m+\ldots+\\&+(m+p)m^{k-2}+m^{k-1})>p(m^{k-1}+m^{k-1}+\ldots+m^{k-1})=pkm^{k-1}>m\end{aligned} \qquad (1)$$

Аналогічно доводиться, що

$$m>n \qquad (2)$$

Але нерівності (1) і (2) суперечать одна одній.

5) Припустимо, що ми зобразили число 101 у вигляд такої суми: $101=a_1+a_2+\ldots+a_9$. Поставимо у відповідність кожному доданку a_i його найменший простий дільник p_i. Оскільки числа a_i попарно взаємно прості, то всі дільники p_i різні. Тому

$$101 = a_1 + a_2 + ... + a_9 \geq p_1 + p_2 + ... + p_9 \geq 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 100 .$$

Якщо $a_1 + a_2 + ... + a_9 > p_1 + p_2 + ... + p_9$, то існує таке i , що $a_i > p_i$. У цьому випадку $a_i \geq 2p_i + 2$ і

$$a_1 + a_2 + ... + a_9 \geq p_1 + p_2 + ... + p_9 + 2 \geq 100 + 2 > 101 .$$

Отже, повинна виконуватись рівність

$$a_1 + a_2 + ... + a_9 = p_1 + p_2 + ... + p_9 = 101.$$

Жодне з чисел $p_1, p_2, ..., p_9$ не може дорівнювати 2, бо число 101-2=99 не можна записати у вигляді суми 8 непарних простих чисел. Але тоді

$$p_1 + p_2 + ... + p_9 \geq 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 127 > 101 .$$

Одержана суперечність доводить, що потрібного зображення для числа 101 не існує.

6) Розглянемо послідовність $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}, ...,$ члени якої задовольняють співвідношення $a_{n+1} = \sqrt{2 - an}$. Очевидно в умові задачі йдеться про число a_{1987}. Неважко помітити, що члени цієї послідовності з непарними номерами завжди лежать у проміжку (1;2), а члени з парними номерами – у проміжку (0;1). Справді, для n=1 і n=2 ця властивість виконується. Припустимо тепер, що для всіх $n \leq 2k$ цю властивість вже доведено. Тоді маємо

$$2 > \sqrt{2} > \sqrt{2 - a_{2k}} = a_{2k+1} > \sqrt{2-1} = 1,$$
$$1 = \sqrt{2-1} > \sqrt{2 - a_{2k+1}} = a_{2k+2} > \sqrt{2-2} = 0.$$

Отже, згідно з принципом математичної індукції, ця властивість виконується для всіх членів послідовності. Зокрема, число a_{1987} лежить у проміжку (1;2), а тому ціла частина числа a_{1987} дорівнює 1.

2. ПОДІЛЬНІСТЬ ЧИСЕЛ

2.1 8 клас

1) Довести, що при кожному цілому n вираз $\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{24}+\frac{n}{30}$ також є цілим.
2) Довести, що не існує цілих чисел x і y таких, які б задовольняли рівняння $x^2+1962=y^2$.
3) Було 4 аркуші паперу. Деякі з них розрізали на чотири частини і т.д. Коли підрахували загальну кількість аркушів, то виявилось, що їх всього 1962. Довести, що підрахунок був неправильний.
4) Довести, що при будь-якому цілому n число $n(n-3)(n^2-3n+14)$ ділиться на 24.
5) На дошці написано числа 1, 2, 3, ... , 1966. Дозволяється витерти будь-які два числа, а замість них написати їх різницю. Внаслідок багатократного виконання цієї операції на дошці залишилося одне число. Довести, що це число не може бути нулем.
6) Нехай a і b – такі цілі числа, що добуток $(16a+17b)(17a+16b)$ ділиться на 11. Довести, що він ділиться на 121.
7) Довести, що число $(1976^{1976}-1974^{1974})(1976^{1975}-1974^{1973})$ ділиться на 10000.
8) Нехай n – довільне натуральне число, $f(n)$ – сума його цифр. Довести, що коли $f(n)=f(2n)$, то n ділиться на 9.
9) Довести, що коли вираз $2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}$ звести до спільного знаменника, то його чисельник ділитиметься на 13.

2.2 9 клас

1) Довести, що $2^{3^n}+1$ при будь-якому натуральному n ділиться на 3^{n+1}.
2) Довести, що для будь-якого трицифрового числа виконується щонайменше одне з трьох тверджень:

   а) це число ділиться на 3;

   б) яка-небудь цифра числа ділиться на 3;

   в) яке-небудь двоцифрове число, складене з цифр даного числа, ділиться на 3.

3) Усі цілі числа довільно розбито на дві групи. Довести, що хоча б в одній із цих груп знайдуться три числа, які утворюють арифметичну прогресію.

4) Довести, що при довільному натуральному n число $2^{2^{2^n}}-3$ ділиться на 13.

5) Позначимо символами $(a,b,...,d)$ і $[a,b,...,d]$ відповідно найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне натуральних чисел $a,b,...,d$. Довести, що

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}.$$

6) Сума цифр деякого 1976-цифрового числа дорівнює 4. Якою може бути сума цифр квадрата цього числа.

7) Позначимо через $D(n)$ суму всіх дільників числа n (включаючи 1 і n). Для яких n число $n\cdot D(n)$ – непарне?

8) На дошці записано дроби

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10},\frac{1}{11},\frac{1}{12}.$$

Чи можна перед кожним з цих дробів поставити знак “+” або “–” так, щоб їх сума дорівнювала нулю?

2.3 10 клас

1) Нехай a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... – послідовність чисел, яка утворена за таким правилом: a_1=1, $a_n = na_{n-1} + (-1)^n$. Довести, що a_n ділиться на n–1 при n>1.

2) Нехай $d(x,y)$ – найбільший спільний дільник натуральних чисел x і y. Довести, що $d(x+y,xy)–d(x,y)$ – парне число.

3) Довести, що для кожного натурального числа m>2 сума всіх натуральних чисел, менших від m і взаємно простих з m, кратна m.

4) Після піднесення до степеня та зведення подібних членів число $(\sqrt{3}-1)^{1981}$ зводиться до вигляду $a+b\sqrt{13},$ де a і b – цілі числа. Довести, що a і b діляться на 2^{1980}.

5) Знайти суму всіх натуральних чисел від 1 до 1000, що не діляться на 7.

6) Число $2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...+\cfrac{1}{1}}}$ (риска дробу зустрічається в правій частині 1988 разів) записано у вигляді звичайного нескоротного дробу $2=\frac{n}{m}.$ Довести, що

$\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{m}\right)^2=\frac{5}{4}-\frac{1}{n^2}.$

7) Довести, що для будь-якого простого числа $p>2$ чисельник m дробу $\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}$, $(m,n\in N)$ ділиться на p.

8) Числа a, b, n натуральні. Доведіть, що якщо a^n+b^n і $a+b$ одночасно діляться на n, то $\frac{a^n+b^n}{a+b}$ у випадку, якщо воно ціле, також ділиться на n.

2.4 11 клас

1) Усі цілі числа від 1 до $2n$ включно розміщено в довільному порядку. До кожного числа додали номер місця, на якому воно стоїть. Довести, що серед утворених сум принаймні два числа при діленні на $2n$ даватимуть однакову остачу.

2) Сукупність натуральних чисел назвемо “правильною”, якщо для кожних двох чисел з цієї сукупності деяке їх спільне кратне також належить цій сукупності. Множину всіх натуральних чисел довільно розбито на дві частини. Довести, що принаймні одна з цих частин є “правильною”.

3) Чи існують такі натуральні числа a і b, що всі чотири дроби $\frac{a}{b},\frac{a+1}{b},\frac{a}{b+1},\frac{a+1}{b+1}$ скоротні?

4) У послідовності $\{a_n\}$ перший член a_1 дорівнює відмінному від 1 натуральному числу a, а кожний член a_n з номером $n>1$ задовольняє співвідношення $a_n=a^n-\sum\limits_k a_k$, де підсумовування в правій частині проводиться по тих індексах $k<n$, які є дільниками числа n (наприклад, $a_{10}=a^{10}-a_1-a_2-a_5$). Довести, що для кожного натурального n число a_n ділиться на n.

5) Числа 1, 2, 3, ..., 105 послідовно виписано в ряд. Після цього змінено знак у кожного третього числа, потім в утвореній послідовності змінено знак у кожного п’ятого числа і, нарешті, в новій послідовності змінено знак у кожного сьомого числа. Знайти суму всіх чисел в останній послідовності.

6) Число A ділиться на 1, 2, 3, ..., 9. Довести, що якщо $2A$ представлено у вигляді суми натуральних чисел, менших 10, тобто $2A=a_1+a_2+\ldots+a_k$, то з чисел a_1, a_2, ..., a_k можна вибрати декілька таких, що їх сума дорівнює A.

7) $6n$-цифрове число ділиться на 7. Останню цифру перенесли на початок. Довести, що утворене число також ділиться на 7.

Розв'язування задач

8 клас

1) Маємо $\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{24}+\frac{n}{30}=\frac{n^5-5n^3+4n}{120}=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{120}$. З п'яти послідовних цілих чисел $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ одне число обов'язково ділиться на 5, друге – на 4, третє – на 3 і принаймні два числа діляться на 2. Отже, добуток $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ ділиться без остачі на $2\cdot4\cdot3\cdot5=120$

2) Запишемо рівняння у вигляді $(y-x)(y+x)=1962$. Якщо одне з чисел x або y – парне, а друге – непарне, то в лівій частині рівності матимемо непарне число і зазначена рівність при таких x і y не виконується. Якщо числа x, y обидва парні або обидва непарні, то в лівій частині рівності матимемо число, яке ділиться на 4, але в правій частині число 1962 на 4 не ділиться. Отже, і в цьому випадку рівність не виконується. Звідки випливає, що не існує цілих чисел x і y таких, які б задовольняли рівняння $x^2+1962=y^2$.

3) Очевидно, після розрізування одного аркуша паперу на 4 частини загальна кількість аркушів збільшиться на 3. Отже, якщо таку операцію провести n разів, то після цього матимемо $4+3n$ аркушів. Якщо вважати, що підрахунок було виконано правильно, то $4+3n=1962$. Звідки $3n=1958$. Але 1958 не ділиться на 3. Отже, підрахунок було виконано неправильно.

4) Позначимо $T_n=n(n-3)(n(n-3)+14)$. Тоді дістанемо

$$T_n=n(n-3)(n^2-n-2n+2+12)=n(n-3)(n-1)(n-2)+12n(n-3).$$

Число $n(n-1)(n-2)(n-3)$ є добутком чотирьох послідовних чисел і тому ділиться на 8 і 3. Число $12n(n-3)$ ділиться на 24, бо добуток $n(n-3)$ є парним числом (n і $n-3$ є числами різної парності). Тому T_n ділиться на 24.

5) При кожній операції, коли витираються будь-які два числа, а замість них пишеться їх різниця, сума всіх чисел, записаних на дошці, зменшується на парне число. справді, якщо витерти числа a і b, то замість суми $a+b$, маємо різницю $a-b$. Отже, і вся сума зменшиться на $2b$. Багаторазовим повторенням цієї операції, після чого на дошці залишиться тільки одне число, всю суму можна зменшити на будь-яке парне число. Зазначимо, що спочатку сума всіх чисел на дошці $1+2+...+1966$ – непарне число, тому що серед цих чисел 983 непарних, а решта – парні. Отже, останнє число на дошці ніколи не може бути нулем.

6) Позначимо $n=16a+17b$, $m=17a+16b$. За умовою задачі число nm ділиться на 11. Звідси випливає, що принаймні одне з чисел n або m ділиться на 11, бо 11 – просте число. Але сума цих чисел $n+m=33(a+b)$ також ділиться на 11. Тому за умови, що одне з них кратне 11, друге також кратне 11. Отже, nm ділиться на $11^2=121$.

7) Число ділиться на 10000 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 2^4 і на 5^4. Задане число ділиться на 2^4. Воно ділиться на $2^{1974}\cdot 2^{1973}=2^{3947}$ (у перших дужках можна винести множник 2^{1974}, а у других 2^{1973}). Отже, лишається довести, що дане число ділиться на 5^4. Доведемо, що кожний вираз, записаний в дужках ділиться на 25. Остача від ділення на 25 числа 1976 дорівнює 1, а числа 1974 дорівнює –1. Тому при діленні на 25 числа 1974^{1973} в остачі дістанемо –1, а при діленні на 25 чисел 1976^{1976}, 1974^{1974} і 1976^{1975} в остачі дістанемо 1. Звідси й випливає, що кожний вираз, записаний у дужках, ділиться на 25, тому дане число ділиться на $25^2=5^4$. Отже, задане число ділиться на 10000.

8) Скористаємось тим, що будь-яке натуральне число при діленні на 9 дає таку саму остачу, що й сума його цифр. Оскільки $f(2n)=f(n)$, то числа n і $2n$ при діленні на 9 дають однакову остачу: $2n=9k+r$, $n=9s+r$. Але тоді $n=2n-n=9(k-s)$ ділиться на 9.

9) Перепишемо даний вираз у такому вигляді:

$$\left(1+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+$$

$$+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{6}\right)=\frac{13}{12}+\frac{13}{22}+\frac{13}{30}+\frac{13}{36}+\frac{13}{40}-\frac{13}{42}+\frac{13}{6}=\frac{13B}{5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 11},$$

де B – деяке ціле число. Твердження задачі тепер стає очевидним, оскільки знаменник дробу на 13 не ділиться.

9 клас

1) Застосуємо метод математичної індукції. При $n=0$ твердження очевидне. Припустимо тепер, що $2^{3^{n-1}}+1$ ділиться на 3^n для деякого фіксованого $n>0$. Доведемо, що тоді $2^{3^n}+1$ ділиться на 3^{n+1}. Маємо

$$2^{3^n}+1=(2^{3^{n-1}})^3+1=(2^{3^{n-1}}+1)(4^{3^{n-1}}-2^{3^{n-1}}+1).$$

Сума в перших дужках за припущенням ділиться на 3^n, тому досить довести, що вираз в дужках ділиться на 3. Це випливає з таких міркувань: 4 при діленні на 3 дає в остачі 1, а тому й при діленні числа 4^k на 3 дістанемо в остачі 1. 2^k при діленні на 3 дає в остачі 2, якщо k – непарне. Отже, остача від ділення виразу в дужках на 3 дорівнює 1–2+1=0, тобто число в цих дужках ділиться на 3.

2) Нехай a_1, a_2, – цифри даного числа. Розглянемо числа a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$. Якщо одне з цих чисел ділиться на 3, то твердження задачі справедливе. Припустимо, що жодне з цих чисел не ділиться на 3. Тоді знайдемо два числа, які при діленні на 3 дають однакову остачу. Різниця цих чисел ділиться на 3, що також доводить твердження задачі (наприклад, якщо число $(a_1+a_2+a_3)–a_1$ ділиться на 3, то число a_2+a_3 ділиться на 3).

3) Розглянемо спочатку окремий випадок. Розіб'ємо всі цілі числа на дві групи, відносячи до першої групи пари чисел вигляду k, $k+1$, а до другої $k+2$, $k+3$. При такому способі розбиття на пари числа k, $k+4$, $k+8$, які належать до першої групи – шукані. При будь-яких інших способах довільного розбиття всіх цілих чисел на дві групи принаймні в одній (нехай для конкретності в першій) знайдуться два числа, різниця між якими дорівнює 2. Позначимо їх через $a–1$ і $a+1$. Розглянемо п'ять чисел: $a–3$, $a–1$, a, $a+1$, $a+3$. Якщо число a взято з першої групи, то твердження задачі правильне і числа $a–1$, a, $a+1$ – шукані. Зазначимо, що коли $a–3$ або $a+3$ належать до першої групи, то шуканими числами будуть $a–3$, $a–1$, $a+1$ або $a–1$, $a+1$, $a+3$. Нарешті, якщо в першій групі немає трьох чисел, які утворюють арифметичну прогресію, то згідно з попереднім, вони містяться в другій групі, це числа $a–3$, a, $a+3$.

4) Задачу можна сформулювати так: довести, що 2^{2^n} при діленні на 13 дає в остачі 3. Неважко перевірити, що при діленні на 13 число 2^{11}=13+3 дає в остачі 3, а число $2^{12}=4096=315\cdot13+1$ дає в остачі 1. Тому для доведення твердження задачі досить встановити, що показник 2^{2^n} можна записати у вигляді $2^2=12m+4$, де m – якесь невідоме число. Справді, для степенів числа 2 з показниками такого вигляду маємо:

$$2^{12m+4} = (2^{12})^m \cdot 2^4 = (315 \cdot 13 + 1)^m (13 + 3)\,.$$

Якщо перемножити усі множники в правій частині цієї рівності, то серед одержаних доданків майже всі ділитимуться на 13 і тільки один, а саме

$\underbrace{1\cdot1\cdot1\ldots1}_{m}\cdot3=3$, не буде ділитись. Тому число 2^{12m+4} при діленні на 13 дає в остачі 3.

Тепер за допомогою методу математичної індукції доведемо, що для будь-якого натурального n число 2^{2^n} можна записати у вигляді $12m+4$. Для $n=1$ твердження очевидне: $2^{2^1}=4=12\cdot0+4$. Припустимо, що число 2^{2^k} можна записати у вигляді: $2^{2^k}=12m+4$, і розглянемо $n=k+1$. Тоді, $2^{2^{k+1}}=2^{2\cdot2^k}=(2^{2k})^2=(12m+4)^2=12(12m^2+81+1)+4=12m+4$. Таким чином, $2^{2^{k+1}}$ теж можна записати у вигляді $12m+4$, тобто твердження залишається справедливим і для $n=k+1$.

5) Запишемо рівність у вигляді:

$$[a,b,c]^2(a,b)(b,c)(c,a)=(a,b,c)^2[a,b][b,c][c,a], \quad (1)$$

щоб зліва і справа стояли цілі числа. З арифметики відомо, що кожне натуральне число розкладається в добуток простих чисел, і цей розклад однозначний. Тому для доведення рівності (1) досить показати, що в розкладі обох частин рівності в добуток простих чисел, кожне просте число p зустрічається в однаковому степені. Справді, нехай в розкладі числа a в добуток простих чисел число p зустрічається в степені $\alpha\geq0$, в розкладі числа b – в степені $\beta\geq0$, в розкладі числа c – в степені $\gamma\geq0$. Оскільки, в рівність (1) числа a, b і c входять симетрично, можемо вважати, що $\alpha\geq\beta\geq\gamma$.

Очевидно, до розкладу числа $(a,b,\ldots,d)$ в добуток простих чисел число p входить в найменшому з тих степенів, в яких воно входить до розкладів чисел $a,b,\ldots,d$, а до розкладу числа $[a,b,\ldots,d]$ – в найбільшому з цих степенів. Тому до розкладу лівої частини рівності (1) число p входить в степені $2\alpha+\beta+\gamma+\gamma=2\alpha+\beta+2\gamma$, а до розкладу правої частини – в степені $2\gamma+\alpha+\beta+\alpha=2\gamma+\beta+2\alpha$. Отже, кожне просте число p входить у розклади обох частин рівності (1) в однакових степенях, що й треба було довести.

6) Якщо перша цифра числа є 4, то сума цифр його квадрата дорівнює 7. В усіх інших випадках при піднесенні числа до квадрата не відбуватиметься перенесення у вищий розряд, тому сума цифр квадрата дорівнює $4^2=16$.

7) Очевидно, числа n і $D(n)$ повинні бути непарними. Позначимо через $a_1,\ldots,a_k$ усі дільники числа n, більші $\sqrt{n}$. Оскільки, в сумі $2k$ доданків $a_1+\ldots+a_k+b_1+\ldots+b_k$ всі доданки – непарні числа, то ця сума буде парною. Але в цій сумі трапляються по одному разу всі дільники числа n (за винятком, можливо, числа $\sqrt{n}$). Отже, щоб число $C(n)$ було непарним необхідно (і достатньо), щоб серед дільників непарного числа n траплялося також число $\sqrt{n}$, тобто n повинно бути квадратом непарного числа.

8) а) Не можна. Справді, якщо поставити перед заданими дробами якимось чином знак "+" або "–" і додати всі такі дроби, крім $\frac{1}{11}$, то після зведення до спільного знаменника дістанемо дріб вигляду $\frac{n}{5\cdot7\cdot8\cdot9}$, де n – деяке ціле число. Але, щоб сума всіх дробів, враховуючи й $\pm\frac{1}{11}$, дорівнювала нулю, необхідно, щоб дріб $\frac{n}{5\cdot7\cdot8\cdot9}$ відрізнявся від $\frac{1}{11}$ щонайменшим знаком. Але це неможливо.

б) З міркувань пункту а) випливає, що дріб $\frac{1}{11}$ потрібно витерти. Аналогічно доводиться, що потрібно витерти і дроби $\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9}$. Перед дробами, що залишились, розставимо довільним чином знаки "+" і "–". Сума дробів $\pm\frac{1}{1},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{6},\pm\frac{1}{12}$ після зведення до спільного знаменника матиме вигляд $\frac{k}{12}$, де k – деяке ціле число. Тому сума всіх залишених дробів дорівнюватиме $\frac{k}{3\cdot4}\pm\frac{1}{5}\pm\frac{1}{10}=\frac{5k+2\cdot3\cdot(\pm2\pm1)}{3\cdot4\cdot5}$. Але чисельник правої частини не дорівнює нулю, бо перший доданок ділиться на 5, а другий не ділиться. Очевидно, сума дробів буде відмінною від нуля і в тому випадку, коли додатково витерти тільки один з дробів $\frac{1}{5}$ або $\frac{1}{10}$. Тому треба витерти обидва ці дроби. Оскільки $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=0$, то жодного іншого дробу витирати з дошки вже не потрібно. Отже, з дошки треба витерти щонайменше шість дробів: $\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10},\frac{1}{11}$.

10 клас

1) При n=2 твердження очевидне, бо кожне ціле число ділиться на 1. Нехай тепер n>2. Маємо $a_n=n\cdot a_{n-1}+(-1)^n$, $a_{n-1}=(n-1)\cdot a_{n-2}+(-1)^{n-1}$. Додавши ці дві рівності, дістанемо $a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$. Звідси й видно, що a_n ділиться на n–1.

2) Розглянемо різні можливі випадки: числа x і y – парні; числа x і y – непарні, числа x і y – різної парності. У першому випадку x+y і xy – парні числа. Отже, $d(x+y, xy)$ і $d(x,y)$ – також парні числа, тобто $d(x+y, xy)$–$d(x,y)$ – парне число.

У другому випадку x+y – парне число, xy – непарне. Отже, $d(x+y, xy)$ і $d(x,y)$

– непарні числа, тобто $d(x+y, xy)–d(x,y)$ – парне число.

У третьому випадку $x+y$ – непарне число, xy – парне. Отже, $d(x+y, xy)$ і $d(x,y)$ – непарні числа, тобто знову $d(x+y, xy)–d(x,y)$ – парне число.

3) Кожен спільний дільник чисел m і $m–k$ буде дільником числа k. Тому числа k і $m–k$ будуть взаємно прості з m одночасно. Отже, всі числа, менші від m і взаємно прості з m можна розбити на пари $(k, m–k)$. Якщо $m>2$, то числа в кожній парі будуть різні. Оскільки сума чисел кожної пари дорівнює m, то сума всіх чисел кратна m.

4) Розглянемо послідовність $x_n=(\sqrt{13}-1)^n$ і запишемо кожен її член у вигляді

$$x_n=a_n+b_n\sqrt{13}, \qquad (1)$$

де a_n і b_n – цілі числа (пропонуємо читачам довести самостійно, що такий запис буде однозначним). Доведемо за допомогою методу математичної індукції, що числа a_n і b_n діляться на $2^{n–1}$

Справді, $a_1=-1$, $b_1=-1$, $a_2=14$, $b_2=-2$, тому для $n=1$ і $n=2$ твердження виконується. Припустимо, що твердження буде виконуватись і для всіх натуральних чисел, не більших довільного фіксованого числа n. Оскільки $(\sqrt{13}-1)^2=14-2\sqrt{13}=12-2(\sqrt{13}-1)$, то $x_{n+1}=(\sqrt{13}-1)^2$, $x_{n-1}=12x_{n-1}2x_n$. Підставляючи сюди замість x_{n+1}, x_n і $x_{n–1}$ їх зображення у вигляд (1) і користуючись однозначністю цього зображення, знаходимо:

$$a_{n+1}=12a_{n–1}–2a_n,\ b_{n+1}=12b_{n–1}–2b_n. \qquad (2)$$

За припущенням індукції $a_{n–1}$ ділиться на $2^{n–2}$, a_n – на $2^{n–1}$. Тому кожне з чисел $12a_{n–1}$ і $2a_n$ ділиться на 2^n. Аналогічно доводиться, що і b_{n+1} ділиться на 2^n. Отже, згідно з принципом математичної індукції, твердження справедливе для кожного натурального числа n. Зокрема, для $n=1981$ дістанемо твердження задачі.

5) Щоб знайти потрібну суму, досить від суми S всіх натуральних чисел від 1 до 1000 відняти суму S_7 тих чисел від 1 до 1000, які діляться на 7. Оскільки

$$S=1+2+...+999+1000=\frac{1+1000}{2}\cdot 1000=500500,$$

$$S_7=7+14+...+994=7(1+2+...+142)=7\cdot\frac{1+142}{2}\cdot 142=71071,$$

то шукана сума дорівнює 500500–71071=429429.

6) Легко перевірити, що співвідношення, яке необхідно довести, рівносильне співвідношенню

$$m^2+mn+n^2=-1. \qquad (1)$$

Для доведення співвідношення (1) розглянемо послідовність $a_1=\frac{1}{1}$, $a_2=\frac{1}{1+\frac{1}{1}}$, ..., члени якої задовольняють умову $a_{k+1}=\frac{1}{1+a_k}$ для кожного натурального числа k. Очевидно, задане число k є не що інше як a_{1988}. Доведемо тепер за допомогою методу математичної індукції, що коли записати число a_k у вигляді нескоротного дробу $a_k=\frac{m_k}{n_k}$, то для всіх натуральних чисел k виконуватиметься рівність

$$m_k^2+m_kn_k-n_k^2=(-1)^{k+1}. \qquad (2)$$

Справді, для k=1 ця рівність виконується: $1^2+1\cdot1-1^2=(-1)^{1+1}$. Припустимо тепер, що для $a_k=\frac{m_k}{n_k}$ рівність (2) уже доведено. Зауважимо, що $a_{k+1}=\frac{1}{1+a_k}=\frac{n_k}{n_k+m_k}$. Оскільки за означенням числа n_k і m_k не мають спільних множників, то

$$m_{k+1}=n_k,\ n_{k+1}=n_k+m_k$$

і
$$m_{k+1}^2+m_{k+1}n_{k+1}-n_{k+1}^2=n_k^2-n_k(n_k+m_k)-(n_k+m_k)^2=$$
$$=-(m_k^2+m_kn_k-n_k^2)=-(-1)^{k+1}=(-1)^{(k+1)+1}.$$

Отже, рівність (2) виконується для довільного натурального числа k. Оскільки, $m_{1988}=n$, то для k=1988 рівність (2) збігається із рівністю (1), яку й треба було довести.

7) Зауважимо, що число p–1 парне. Перетворимо дріб $\frac{m}{n}$ до вигляду

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p-1}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{p-3}\right)+...+$$
$$+\left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right)=\frac{p}{1(p-1)}+\frac{p}{2(p-2)}+\frac{p}{3(p-3)}+...+\frac{p}{\frac{p-1}{2}\frac{p+1}{2}}=$$
$$=p\left(\frac{1}{1(p-1)}+\frac{1}{2(p-2)}+\frac{1}{3(p-3)}+...+\frac{1}{\frac{p-1}{2}\frac{p+1}{2}}\right).$$

Зведемо отриманий вираз до спільного знаменника

$$1(p-1)\cdot2(p-2)\cdot3(p-3)...\frac{p-1}{2}\frac{p+1}{2}=(p-1)!,$$

тоді отримаємо відношення $\frac{m}{n}=p\frac{q}{(p-1)!}$, де $q\in N$, з якого випливає рівність

$m(p-1)!=pqn$. Оскільки жодне з чисел 1, 2, 3,..., p–1 не ділиться на просте число p, то остання рівність можлива лише в тому випадку, якщо m ділиться на p без остачі. Твердження задачі доведено.

8) Припустимо, що дріб – ціле число, тобто n – непарне. Тоді дріб дорівнює $a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-...+b^{n-1}$ (n доданків). Доведемо, що будь-які два сусідніх доданки $a^{n-k}b^k$ і $-a^{n-k-1}b^{k+1}$ при діленні на n дають однакову остачу. Дійсно, їх різниця дорівнює $a^{n-k-1}b^k(a+b)$, ділиться на n. Отже, сума остач при діленні на n всіх доданків ділиться на n.

11 клас

1) Припустимо протилежне, а саме: нехай серед утворених сум усі числа при діленні на $2n$ дають різні остачі. Зрозуміло, що ці остачі дорівнюватимуть 0, 1, 2, ..., $2n$–1.

Зазначимо, що сума S_1 всіх сум (тобто сума всіх чисел від 1 до $2n$ плюс сума всіх їх номерів) при діленні на $2n$ повинна давати ту саму остачу, що й сума всіх остач S_2 при діленні на $2n$. Перевіримо це.

Сума $S_1=2(1+2+...+2n)=2n(2n+1)$ при діленні на $2n$ дає в остачі нуль. Сума $S_2=0+1+2+...+(2n-1)=n(2n-1)=2n^2-n$ при діленні на $2n$ дає в остачі n. Отже, ми прийшли до суперечності, звідки випливає, що серед утворених сум принаймні два числа при діленні на $2n$ дають однакову остачу.

2) Припустимо, що кожна з частин A і B, на які розбито множину усіх натуральних чисел, є "неправильною". Тоді, в A знайдуться такі числа m і n, що жодне їх спільне кратне не належить до A. У частині B також знайдуться числа p і g, жодне спільне кратне яких не належить до B. Але одна з частин A або B обов'язково містить число $mnpg$, яке ділиться і на m, і на n, і на p ,і на g. А це суперечить припущенню, що кожна з частин A і B є "неправильною".

3) Нехай p – найбільший спільний дільник (НСД) чисел a і b, g – НСД чисел a+1 і b, r – НСД чисел a і b+1, s – НСД чисел b+1 і a+1. Оскільки, числа a і a+1 (а також числа b і b+1) взаємно прості, то числа p, g, r і s будуть попарно взаємно простими. Виберемо довільно таку четвірку чисел. Зауважимо, що a ділиться на pr, a+1 – на sg, b – на pg, b+1 – на rs. Для знаходження чисел a і b скористаємось таким твердженням: для довільних взаємно простих чисел n і m знайдуться такі натуральні числа n_1 і m_1, що n_1mm_1n=1. Це твердження випливає з того, що добутки n_1m, де $0\le n_1<n$ мають різні остачі при діленні на n.

Зокрема, один з таких добутків дає в остачі 1. Покладемо $m=gs$, $n=pr$ і знайдемо такі числа a_1 і a_2, що $a_2gs–a_1r=1$. Позначивши $a=a_1pr$, дістанемо $a+1=a_2gs$. Аналогічно позначивши $m=rs$, $n=pg$, знаходимо $b=b_1pg$, $b+1=b_2rs$. Неважко перевірити, що побудовані так числа a і b задовольняють умову задачі. Нехай, наприклад, $p=2$, $g=5$, $r=7$, $s=3$. Рівняння $a_2\cdot 5\cdot 3–a_1\cdot 2\cdot 7=1$ має очевидний розв'язок $a_1=a_2=1$, тому можна взяти $a=a_1\cdot 2\cdot 7=14$, $a+1=14+1=15$. Аналогічно, рівняння $b_2\cdot 3\cdot 7–b_1\cdot 2\cdot 5=1$ має розв'язок $b_1=2$, $b_2=1$, тому $b=2\cdot 2\cdot 5=20$, $b+1=21$. Очевидно, кожний дріб $\frac{14}{20},\frac{15}{20},\frac{14}{21},\frac{15}{21}$ скоротний. Вибираючи інші четвірки чисел p, g, r, s матимемо нові пари чисел a і b.

4) Розглянемо послідовність $x_1,...,x_n$, елементи якої належать множині $\{1,2,...,a\}$ (з можливими повтореннями) і розмістимо її циклічно на деякому колі. Назвемо таку розстановку періодичною з періодом $d=1,...,n$, якщо циклічний зсув усіх її членів на d номерів вздовж кола не змінює послідовності в цілому (причому d – найменше з таких чисел).

Позначимо через b_n кількість періодичних розстановок з періодом $d=n$ (тобто, по суті, таких, які не мають періоду). Тоді $b_1=a$, $b_2=a(a-1)=a^2-a=a-b_1,...$.

Зауважимо, що кожна k-періодична послідовність однозначно визначається першими k елементами, а розглянуті окремо ці елементи повинні утворювати k-періодичну послідовність.

Оскільки множина усіх n-елементних послідовностей чисел $\{1,2,...,a\}$ розпадається на об'єднання n-періодичних та усіх k-періодичних послідовностей (де період k – дільник n), то $a^n=b_n+\sum\limits_{k/n}b_k$. Отже, послідовність b_n визначається за тими самими рівняннями, що й дана послідовність a_n. Оскільки $b_1=a_1$, то за індукцією доводимо рівність $b_n=a_n$ при усіх n.

Нарешті, зауважимо, що кожній n-періодичній послідовності $x_1,...,x_n$ відповідає рівно $n–1$ різних n-періодичних послідовностей (що утворені з неї послідовними циклічними зсувами: $x_2,...,x_n,x_1,x_3,...,x_n,x_1,x_2$ і т.д.). Тому загальна кількість b_n таких послідовностей поділена на n.

Оскільки $a_n=b_n$, як доведено вище, то і a_n ділиться на n, що і треба було довести.

5) При обчислені вказаної в задачі суми враховуються із знаком мінус ті з чисел 1,2,3,...,105, які діляться лише на одне з чисел 3,5,7 і число $105=3\cdot 5\cdot 7$, яке ділиться на кожне з чисел 3,5,7. Тому шукана сума дорівнює

$$S-2(S_3+S_5+S_7)+4(S_{35}+S_{37}+S_{57})-8\cdot 105,$$

де S – сума усіх даних чисел 1,2,...,105, S_p – сума тих чисел серед 1,2,...,105, які діляться на число p, S_{pq} – сума тих чисел, які діляться на p і q. Оскільки

$$S=\sum_{i=1}^{105} i=\frac{105\cdot 106}{2}=105\cdot 53,$$

$$S_p=p+2p+...+\frac{105}{p}\cdot p=p\cdot\sum_{i=1}^{105/p} i=105\frac{105+p}{2p},$$

$$S_{pq}=pq+2pq+...+\frac{105}{pq}\cdot pq=pq\cdot\sum_{i=1}^{105/pq} i=105\frac{105+pq}{2pq},$$

то шукана сума дорівнює

$$105(53-2(18+11+8)+4(4+3+2)-8)=105\cdot 7=735.$$

6) Припустимо супротивне. Тоді відмітимо перш за все, що серед чисел $a_1,...,a_k$ не більше 7 одиниць. Дійсно, якщо додаємо решту чисел по одному, ми можемо зробити суму меншою A, але більшою A–8 (до тих пір, поки вона менша, можна додати ще одне число). Тому, якщо є 8 одиниць, ми можемо зробити суму, що дорівнює A. Далі, серед $a_1,...,a_k$ не більше 7 двійок. Будемо міркувати аналогічно, додаючи кожного разу одне парне число або два непарних (щоб сума залишалась парною). У деякий момент ми отримаємо число, менше A, але більше A–18 і до того ж парне як і A. Додаючи до нього потрібну кількість двійок, ми отримуємо A. Аналогічні міркування показують, що серед доданків не дуже багато трійок, четвірок,..., дев'яток. Але тоді сума, очевидно, менше $5040=2520\cdot 2$ (2520 – перше число, яке ділиться на 1,2,...,9), що суперечить умові.

7) Якщо дане число A дорівнює $10a+b$, то утворене число B дорівнює $10^{6n-1}b+a$. Але тоді $10B-A=(10^{6n-1}-1)b$ кратне 7 (оскільки 999999 кратне 7). А так як A ділиться на 7, то і B також ділиться.

3. ПРОСТІ ЧИСЛА ТА ЧИСЛА ІЗ ЗАДАНОЮ СИСТЕМОЮ ЦИФР

3.1 8 клас

1) З'ясувати, при яких натуральних значеннях k числа вигляду 101010...101, складені з k нулів і k+1 одиниць прості.
2) Довести, що для довільного натурального числа n число $n^{1988}+n^{1987}+1$ не є простим.
3) Цифри всіх цілих чисел від 1 до 100, записаних підряд, утворюють число. Викреслити з цього числа 100 цифр так, щоб число утворене залишеними цифрами, було найменшим.
4) Якщо перші m цифр квадрата деякого m-цифрового числа збігаються з цифрами самого числа, то це число є степенем 10. Довести це.
5) Знайти чотиризначні числа $\overline{abcd}$, які дорівнюють $(5c+1)^2$.
6) Скільки існує різних 1974-цифрових чисел, у яких добуток цифр, що стоять на парних місцях, непарний, а добуток цифр, що стоять на непарних місцях, парний?
7) Знайти всі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, для яких виконується рівність $\overline{abcd} = \overline{6a} \cdot \overline{cd}$.
8) Знайти всі такі трицифрові числа $\overline{abc}$, щоб сума шести двоцифрових чисел, складених з цифр цього числа, дорівнює числу $\overline{abc}$.
9) Нехай n – натуральне число. Чи може сума цифр числа $M=(n+1)^2+(n+2)^2+...+(n+1980)^2$ дорівнювати 1981?

3.2 9 клас

1) Нехай p і q – прості числа, причому q^3-1 ділиться на p, а $p-1$ ділиться на q. Довести, що $p=1+q+q^2$.
2) Дослідити, просте чи складене число $2^{1968}+1$.
3) Знайти всі пари простих чисел p і q, які задовольняють рівність $p^2-2q^2=1$.
4) Довести, що всі натуральні числа від 1 до 1965 не можна записати у такому порядку, щоб число, яке утвориться, було точним квадратом.
5) Нехай $p>5$ – просте число. Зобразимо число $\frac{1}{p}$ у вигляді нескінченого

періодичного дробу. Довести, що сума всіх цифр, які стоять в періоді, ділиться на 9.

6) Чи можна розмістити по колу цифри від 0 до 9 включно так, щоб сума будь-яких трьох цифр, що стоять поряд, не перевищувала а) 14; б) 15.

7) В автомат укладають мідні монети на суму n копійок. Нехай a_n – кількість способів (з урахуванням порядку вкидання монет різної вартості), якими це можна зробити. Наприклад, суму в 3 копійки можна вкинути чотирма способами: 3, 2+1, 1+2 і 1+1+1, тому $a_3 = 4$; аналогічно $a_4 = 7$ і т.д. Довести, що, починаючи з деякого місця, остання цифра чисел a_n буде періодично повторюватися.

8) Знайти всі п'ятизначні числа $\overline{abcde}$, що діляться на $\overline{abde}$.

3.3 10 клас

1) Нехай p – просте число. Довести, що p різних цілих чисел, у записі яких у системі числення з основою p немає цифри $p-1$, не можуть утворювати арифметичну прогресію.

2) Знайти прості числа p і q, коли відомо, що рівняння $x^4 + px^3 + q = 0$ має цілий корінь.

3) Натуральні числа $a_1, a_2, ..., a_n$ всі більші за 1, не перевищують числа $4n(n-1)$ і попарно взаємно прості. Довести, що принаймні одне з цих чисел просте.

4) Довести, що в числі $(8+\sqrt{65})^n$ перші n десяткових знаків після коми дорівнюють нулю (n – непарне число).

5) Маємо паперову стрічку з написаним на ній 1970-цифровим числом, у запису якого немає жодного нуля. Довести, що є принаймні два різних способи, за якими можна розрізати цю стрічку на частини не менш ніж з двома цифрами на кожній так, що сума всіх чисел на них буде в обох випадках однаковою.

6) На паперовій смужці записано послідовність 1212...121...12, у якій 1982 цифри. На яке найбільше число частин можна розрізати цю смужку, щоб усі числа на одержаних при цьому шматках смужки були різними.

7) На паперовій смужці записано послідовність 123123...123123...123, у якій 360 цифр. На яке найбільше число частин можна розрізати цю смужку, щоб усі числа на одержаних при цьому шматочках смужки були різними.

8) Якого найбільшого значення може набувати різниця $\overline{abc}-(a^3+b^3+c^3)$ (різниця тризначного числа $\overline{abc}$ і суми кубів його цифр)?

3.4 11 клас

1) Нехай p – просте число, яке більше 2. Довести, що сума остач від ділення чисел $1^p, 2^p, 3^p, ..., (p-1)^p$ на p^2 дорівнює $\frac{p^2(p-1)}{2}$.
2) Шестицифрове число, що ділиться на 37, записано різними цифрами. Довести, що з його цифр можна утворити інше шестицифрове число, яке також ділитиметься на 37.
3) Число $\overline{5599...98933...39}$ подати у вигляді суми квадратів трьох цілих чисел.
4) Довести, що $2k$-цифрове число, перші $k+1$ цифри якого одиниці, не може бути квадратом цілого числа.
5) Нехай $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – нескінченна зростаюча послідовність натуральних чисел, причому для всіх натуральних n виконуються нерівності $a_{n+1}-a_n \le (a_n)^{\frac{3}{4}}$. Довести, що серед членів цієї послідовності зустрінеться число, десятковий запис якого починається довільною, наперед заданою комбінацією цифр.
6) Чи існує таке натуральне число n, що перші 8 цифр дробової частини (після коми) числа $\sqrt{n}$ становлять число 19851986?
7) У десятковому записі цілого числа A всі цифри, крім першої і останньої – нулі, перша і остання – не нулі, кількість цифр – не менша трьох. Довести, що A не є точним квадратом.
8) Знайти які-небудь натуральні числа $a_1 < a_2 < ... < a_{2n-1}$, що утворюють арифметичну прогресію і також, що їх добуток є квадратом.

Розв'язування задач

8 клас

1) При $k=1$ маємо просте число 101. нехай $k>1$. Помноживши число $a=1010...101$ на 11, дістанемо число $11a=1111...111$, яке записується $2k+2$ цифрами 1. Воно розкладається на такі два множники: $b=111...11$ (запис містить $k+1$ цифру 1) та $c=100...01$ (між двома крайніми цифрами 1 запис містить k цифр 0). Отже,

$11a = b \cdot c$. Із цієї рівності випливає, що принаймні одне із чисел b чи c ділиться на 11. Враховуючи, що кожне з них більше від 11 ($b > 11$, бо $k > 1$), приходимо до висновку, що число a не просте. Воно розкладається або на множники b_1 і c, де $b_1 = \frac{b}{11}$, або на множники b і c_1, де $c_1 = \frac{c}{11}$.

2) Оскільки

$$n^{1988}+n^{1987}+1=n^{1986}(n^2+n+1)-(n^{1986}-1)=n^{1986}(n^2+n+1)-((n^3)^{662}-1)=$$

$$=n^{1986}(n^2+n+1)-(n^3-1)(n^{3\cdot 661}+n^{3\cdot 660}+...+n^3+1)=n^{1986}(n^2+n+1)-(n^2+$$
$$+n+1)(n-1)(n^{3\cdot 661}+...+n^3+1)=(n^2+n+1)(n^{1986}-(n-1)(n^{3\cdot 661}+...+n^3+1)),$$

то число $n^{1988}+n^{1987}+1$ ділиться на число n^2+n+1. Очевидно, для кожного $n \ge 2$ виконуються нерівності $n^{1988}+n^{1987}+1 > n^2+n+1 > 1$. Тому число $n^{1988}+n^{1987}+1$ – складене.

3) При викреслюванні цифр треба домагатися, щоб число, яке залишиться, мало якомога менше розрядів. Для цього залишимо на початку якомога більше нулів. Шуканим числом буде 12345061626364656667...100.

4) Припустимо, що число N^2 записується $m+r$ цифрами, причому перші m цифр утворюють число N. Замінюючи останні r чисел нулями, дістанемо нерівність $N^2 \ge N \cdot 10^r$. Замінюючи останні r цифр числа N^2 цифрами 9, матимемо нерівність $N^2 < N \cdot 10^r + 10^r - 1$, або $N^2 + 1 \le (N+1) \cdot 10^r$. З нерівності $N^2 - 1 < N^2 + 1 \le (N+1) \cdot 10^r$ матимемо $N - 1 < 10^r$, $N < 10^r + 1$. Отже, $N = 10^r$.

5) *<u>Перший спосіб</u>*. Для знаходження цифр a, b, c шуканого числа $\overline{abca}$ матимемо рівняння $\overline{abca} = (5c+1)^2$, яке можна записати так:

$$1000a + 100b + 10c + 1 = 25c^2 + 10c + 1,$$

або після спрощення

$$1001a - 1 = 25(c^2 - 4b). \qquad (1)$$

Права частина цієї рівності ділиться на 25. Отже, на 25 повинна ділитись і ліва частина. Але оскільки $1 \le a \le 9$, то ліва частина рівності (1) ділитиметься на 25 лише тоді, коли $a = 1$. Підставивши значення $a = 1$ в рівність (1), матимемо

$$1000 = 25(c^2 - 4b)$$

Звідси $c^2 = 4(10 + b)$. Оскільки $0 \le b \le 9$, то права частина цієї рівності буде повним квадратом цілого числа лише тоді, коли $b = 6$. Тоді $c^2 = 4 \cdot 16$, а отже, $c = 8$. Таким чином, тільки одне число $1681 = (5 \cdot 8 + 1)^2$ задовольняє умову задачі.

<u>Другий спосіб</u>. Оскільки $0 \le c \le 9$, то число $(5c+1)^2$ буде чотиризначним лише тоді,

коли c дорівнюватиме одному з чисел 7, 8, 9. Якщо $c=7$, то $(5\cdot 7+1)^2=1296$, якщо $c=8$, то $(5\cdot 8+1)^2=1681$, а якщо $c=9$, то $(5\cdot 9+1)^2=2106$. Звідси дістаємо, що умову задачі задовольняє $c=8$ і шуканим числом буде $1681=(5\cdot 8+1)^2$.

6) Для того, щоб добуток цифр, що стоять на парних місцях був непарним, необхідно і достатньо, щоб на кожному парному місці стояла непарна цифра. Оскільки непарних цифр всього 5, то кожне з $1974:2=987$ парних місць незалежно від інших може бути заповнене 5 різними способами.

Непарні місця спочатку заповнено довільним чином. Оскільки ціле число не може починатися цифрою 0, то перше місце може бути заповнене 9 різними способами, а кожне наступне непарне місце – 10 способами. Отже, довільним чином заповнити 987 непарних місць 1974-цифрового числа можна $9\cdot 10^{986}$ різними способами. Але щоб добуток цифр на непарних місцях був парним числом, необхідно і достатньо, щоб принаймні одна з цих цифр була парною. Тому від загальної кількості способів заповнення треба відняти кількість способів заповнення цих місць включно непарними цифрами, тобто 5^{987}. Отже, заповнити непарні місця цифрами так, щоб їх добуток був парним числом, можна $9\cdot 10^{986}-5^{987}$ різними способами. Оскільки для кожного способу заповнення непарних місць існує 5^{987} різних способів заповнення парних місць, то кількість шуканих чисел дорівнює $(9\cdot 10^{986}-5^{987})\cdot 5^{987}=5^{1973}(9\cdot 2^{986}-5)$.

7) Оскільки $\overline{cd}<100$, а $\overline{6a}\cdot 100$ починається цифрою 6, то $1\le a\le 6$. Остання цифра добутку ad повинна бути d. Іншими словами, $d(a-1)$ повинно ділитися на 10. Це неможливо в таких випадках: 1) $a=1$; 2) $d=0$; 3) $a=b$, d – парне; 4) $d=5$, a – непарне. Проаналізувавши кожен із випадків, маємо такі числа: 1220, 1830, 1525, 3150. Усі вони задовольняють умову задачі.

8) Із умови задачі випливає, що $22(a+b+c)=100a+10b+c$, або $26a=4b+7c$. З цієї рівності видно, що c – парна цифра. Оскільки $b\le 9$, а $c\le 8$, то $26a\le 92$, звідки $a\le 3$. Якщо $a=1$, то неодмінно $c=2$, бо $7\cdot 4>26$; тоді $b=3$. Таким чином, у цьому випадку маємо число 132.

Якщо $a=2$, то c неодмінно ділиться на 4, а тому $c=4$, бо $7\cdot 8>26\cdot 2$. У цьому випадку $b=6$. Отже, маємо число 264.

Аналогічно впевнюємося, що коли $a=3$, то $c=6$, $b=9$ і маємо число 369. Таким чином, вказану в задачі властивість мають три числа: 132, 264, 396.

9) Кожне натуральне число можна подати в одному з трьох виглядів: $3k$, $3k-1$ або $3k+1$, де k – деяке ціле число. Звідси випливає, що квадрат натурального числа або ділиться на 3, або при діленні на 3 дає в остачі 1. Оскільки серед будь-яких дев'яти послідовних натуральних чисел рівно три числа діляться на 3, то сума квадратів дев'яти послідовних натуральних чисел завжди поділиться на 3. Число M можна записати у вигляді суми $1980:9=220$ доданків, кожен з яких буде сумою квадратів дев'яти послідовних натуральних чисел. Тому число M ділиться на 3. Але тоді на 3 ділиться і сума цифр числа M. Оскільки число 1981 на 3 не ділиться, то сума цифр числа M не може дорівнювати 1981.

9 клас

1) Як відомо, простим числом називається число, яке не дорівнює одиниці і має властивість ділитися тільки саме на себе і на одиницю. Оскільки p і q – прості числа, а отже $p\neq 1$, $q\neq 1$, то з умови, що $p-1$ ділиться на q, випливає

$$p=lq+1, \qquad (1)$$

де $l\geq 1$ – ціле число.

За умовою задачі $q^3-1=(q-1)(q^2+q+1)$ ділиться на p. Оскільки число p просте, то хоча б один із співмножників $q-1$ або q^2+q+1 повинен ділитися на p, бо в протилежному випадку число q було б більше ніж $p+1$ ($q>p+1$), а це суперечило б рівності (1). Отже, на p ділиться q^2+q+1. Таким чином, q^2+q+1 можна подати у вигляді

$$q^2+q+1=mp, \qquad (2)$$

де m – деяке натуральне число. Перепишемо останню рівність так:

$$q^2+1-m(p-1)=m-1. \qquad (3)$$

Сума в лівій частині рівності (3) ділиться на q, тому що на q ділиться кожен з її доданків ($p-1$ ділиться на q за умовою задачі). Отже, на q повинна ділитись і права частина, тобто $m-1$. Тоді

$$m=kq+1, \qquad (4)$$

де $k\geq 0$ – ціле число.

Підставимо вирази (1) і (4) в рівність (2) і зведемо подібні члени:

$$(kl-1)q^2+(l+k-1)q=0 \qquad (5)$$

З цього рівняння випливає, що $k=0$. Справді, припустимо протилежне, а саме, що $k\neq 0$. Тоді у зв'язку з тим, що k і l набувають цілих додатних значень, обидва доданки лівої частини (5) будуть додатні і рівність (5) не виконуватиметься. Отже, $k=0$.

Підставивши значення $k=0$ у рівність (4), дістанемо $m=1$, тоді з рівності (2) випливає $p=q^2+q+1$, що й треба було довести.

2) Оскільки $1968=3\cdot 656$, то задане число можна записати так:

$$2^{1968}+1=(2^{656})^3+1=(2^{656}+1)\cdot(2^{1312}-2^{656}+1),$$

тобто його можна розкласти на два множники, кожен з яких є цілим числом і не дорівнює 1. Отже, $2^{1968}+1$ – складене число.

3) Зазначимо, що ті цілі значення p, які задовольняють рівняння $p^2-2q^2=1$, повинні бути більші за 2. Запишемо дане рівняння у вигляді:

$$\frac{(p-1)(p+1)}{2}=q^2 \qquad (1)$$

Оскільки $p>2$ – просте число, то воно непарне і, отже, $(p-1)\cdot(p+1)$ ділиться на 8 (один із співмножників ділиться на 2, другий – на 4). Таким чином, ліва частина рівності (1) ділиться на 4. тоді на 4 повинна ділитися й права частина, тобто q^2. Оскільки q – ціле число, то це можливо тільки тоді, коли q – парне число. Єдиним простим парним числом є 2. Підставляючи це значення в задане рівняння, знаходимо $p=3$. Звідси єдиною парою простих чисел, які задовольняють дане рівняння, є $p=3$, $q=2$.

4) Відомо, що число ділиться на 3 або на 9 тоді й тільки тоді, коли сума його цифр ділиться відповідно на 3 або на 9. Цю ознаку можна сформулювати в загальній формі. Якщо $\overline{a_1a_2a_3...a_k}$ - число, де кожне a_i означає не окрему цифру, а групу цифр, що стоять у цьому числі підряд, то це число ділиться на 3 або на 9 тоді і тільки тоді, коли сума чисел $a_1+a_2+...+a_k$ ділиться відповідно на 3 або на 9. Це випливає з того, що

$$\overline{a_1a_2a_3...a_k}=a_1\cdot 10^{r_1}+a_2\cdot 10^{r_2}+...+a_{k-1}\cdot 10^{r_{k-1}}+a_k,$$

а 10^p при діленні на 3 або на 9 дає в остачі 1.

На цій підставі можна твердити, що число, про яке йдеться в задачі, ділиться на 3 або на 9 тоді і тільки тоді, коли відповідно на 3 або на 9 ділиться число

$$1+2+3+...+1965=\frac{1965\cdot 1966}{2}=1965\cdot 983.$$

Цей добуток ділиться на 3, але не ділиться на 9. Зауважимо, що кожне число, яке ділиться на 3 і є точним квадратом, повинно ділитися на 9.

5) Нехай десятковий запис дробу $\frac{1}{p}$ має вигляд

$$\frac{1}{p}=0,b_1b_2...b_n(a_1a_2...a_m). \qquad (1)$$

Позначимо $b=\overline{b_1b_2...b_n}$, а $a=\overline{a_1a_2...a_m}$. Тоді

$$\frac{1}{p}=\frac{b}{10^n}+\frac{1}{10^n}\left(\frac{a}{10^m}+\frac{a}{10^{2m}}+...\right)=\frac{b}{10^n}+\frac{a}{10^n(10^m-1)}.$$

Звідси отримаємо

$$pa=(10^m-1)(10^n-pb) \qquad (2)$$

Оскільки десятковий запис числа 10^m-1 складається з m дев'яток, то 10^m-1 ділиться на 9. Але тоді і добуток pa ділиться на 9. Оскільки число p – просте і більше 5, то p не ділиться навіть на 3. Тому на 9 повинно ділиться число a. Але тоді на 9 буде ділитись і сума числа a, тобто сума цифр, що стоять в періоді десяткового запису числа $\frac{1}{p}$.

6) а) Не можна. Справді, припустимо, що розміщення цифр, яке б задовольняло умову а) можливе. Розіб'ємо дев'ять ненульових чисел, записаних після 0, на три групи, включивши в кожну групу по три цифри, що стоять поряд. Нехай S_1, S_2, S_3 - суми цифр відповідно першої, другої та третьої груп. Тоді $S_1+S_2+S_3\le 14+14+14=42$. Крім того, кожна з цифр 1, 2, ..., 9 входить в одну з цих сум. Тому $S_1+S_2+S_3=1+2+...+9=45$, що суперечить попередній нерівності.

б) Можна. Ось один з прикладів: 0, 9, 5, 1, 8, 4, 3, 7, 2, 6.

7) Нехай у нас є якийсь спосіб укинути в автомат монети на суму n копійок, причому остання монета, яка вкидається, має вартість k. Якщо ми цю останню монету не вкинемо, то дістанемо певний спосіб укидання монет на суму $n-k$ копійок. Навпаки, якщо є якийсь спосіб укинути монети на суму $n-k$ копійок, то вкинувши потім ще монету вартістю k, дістанемо спосіб укидання монет на суму n копійок. Отже, кількість тих способів укидання монет на суму n копійок, для яких остання вкинута монета має вартість k, дорівнює a_{n-k}. Оскільки k може дорівнювати 1, 2, 3 або 5 (мідних монет іншої вартості нема), то для кожного $n>5$ маємо рівність

$$a_n=a_{n-5}+a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}.$$

З цієї рівності випливає, що остання цифра числа a_n однозначно визначається останніми цифрами чисел a_{n-5}, a_{n-3}, a_{n-2} і a_{n-1}. Позначимо останню цифру числа

a_n через b_n і розглянемо впорядковані п’ятірки цифр виду $(b_{n-5}, b_{n-3}, b_{n-2}, b_{n-1})$. Очевидно, різниця таких п’ятірок може бути щонайбільше 10^5. Тому знайдуться два таких номери l і m, $l < m$, що п’ятірки $(b_{l-5}, ..., b_{l-1})$ і $(b_{m-5}, ..., b_{m-1})$ будуть однаковими. Але тоді з наведених вище міркувань випливає, що однаковими будуть і цифри b_l і b_m. Повторюючи ці міркування далі, послідовно дістанемо $b_{l+1} = b_{m+1}$, $b_{l+2} = b_{m+2}$ і т.д. Отже, починаючи з номера m, цифри b_n будуть повторюватись з періодом $k = m - l$.

8) Нехай $\overline{abcde}$ ділиться на $\overline{abde}$. Оскільки число $\overline{abde0}$ ділиться на $\overline{abde}$, то тризначне число $\overline{abcde} - \overline{abde0} = 10^2(c-d) + 10(d-c) + l$ ділиться на $\overline{abde}$. Це може бути лише тоді, коли $c = d = e = 0$. Таким чином, шукані числа мають вигляд $\overline{ab000}$.

10 клас

1) Припустимо, що p різних чисел

$$a, a+d, ..., a+(p-1)d \qquad (1)$$

записаних у системі числення з основою p, утворюють арифметичну прогресію з основою d. Остача від ділення кожного з цих чисел на p дорівнює його останній цифрі. Усього може бути p різних остач від ділення на p: 0, 1, 2, ..., $p-1$. Але за умовою задачі цифра $p-1$ не зустрічається в записі чисел (1). Тому принаймні два числа $a + kd$ і $a + ld$ $(0 \le k \le p-1,\ 0 \le l \le p-1,\ k < l)$ при діленні на p дають однакову остачу. Різниця цих чисел $(a+ld)-(a+kd) = d(l-k)$ ділиться на p. Оскільки $l - k < p$ і p – просте число, то d ділиться на p. Тому всі числа (1) мають однакові останні цифри. Відкинувши останню цифру, отримаємо арифметичну прогресію, до якої можна застосувати попередні міркування. Зрештою це суперечить тому, що всі числа різні.

2) Нехай x_0 – цілий корінь даного рівняння. Тоді

$$q = x^3(p - x_0)$$

Оскільки q – просте число, то звідси випливає, що $x_0 = 1$ або $x_0 = -1$. Розглянемо обидва ці випадки.

а) $x_0 = 1$. Тоді $q = p - 1$. Числа p і q мають різну парність. Але серед парних чисел є тільки двоє простих: 2 і –2. Отже, маємо дві можливості $p = 3$, $q = 2$ або $p = -2$, $q = -3$.

б) $x_0 = -1$. У цьому випадку $q = -p - 1$, звідки $p = 2$, $q = -3$ або $p = -3$, $q = 2$.

3) Доводимо від супротивного. Припустимо, що всі числа a_i $(i=1,2,...,n)$ складені. Позначимо через p_i найменший простий дільник числа a_i $(i=1,2,...,n)$. Прості числа $p_1, p_2,..., p_n$ всі різні між собою, бо числа $a_1, a_2,..., a_n$ за умовою задачі попарно взаємно прості. Крім того, $p_i \le \sqrt{a_i} \le \sqrt{4n(n-1)} = \sqrt{(2n-1)^2-1} < 2n-1$. Справді, якщо $a_i = p_i q_i$, то $p_i \le q_i$, а тому $p_i^2 \le p_i q_i = a$. Виходить, що серед чисел 1, 2, 3, 4, ..., $2n-3$, $2n-2$ є щонайменше n простих (бо такими мусять бути числа $p_1, p_2,..., p_n$). Проте насправді це не так. Половина виписаних чисел парні. Серед них маємо тільки одне просте число, а саме 2. Решта $n-1$ чисел – непарні; серед них простих чисел не більше ніж $n-2$, бо число 1 за означенням не є простим. Отже, серед чисел 1, 2, 3, 4, ..., $2n-3$, $2n-2$ простих чисел не більше ніж $n-1$. Суперечність спростовує початкове припущення. Тому насправді серед чисел $a_1, a_2,..., a_n$ неодмінно є просте.

4) Позначимо задане число через A, тобто $A=(8+\sqrt{65})^n$, і подамо його у вигляді

$$A=\left(\frac{(8+\sqrt{65})(\sqrt{65}-8)}{(\sqrt{65}-8)}\right)^n=\frac{1}{(\sqrt{65}-8)^n}$$

Число $\frac{1}{A}$ запишеться так: $\frac{1}{A}=(\sqrt{65}-8)^n$. Розглянемо різницю

$$R=A-\frac{1}{A}=(8+\sqrt{65})^n-(\sqrt{65}-8)^n$$

Якщо n – непарне число, то R – ціле. Отже, десяткові знаки після коми в числах A і $\frac{1}{A}$ збігаються. Доведемо, що перші n десяткових знаків після коми числа $\frac{1}{A}=\frac{1}{(8+\sqrt{65})^n}$ дорівнюють нулю. Маємо

$$\frac{1}{(8+\sqrt{65})^n}<\frac{1}{10^n}$$

У числа $\frac{1}{10^n}$ перші $n-1$ десяткових знаків після коми дорівнюють нулю, а перша цифра, що не дорівнює нулю, є 1, тому в меншого числа принаймні n перших десяткових знаків після коми також дорівнюють нулю.

5) Позначимо через S суму всіх чисел, які б ми дістали при розрізанні стрічки на частини, на кожній з яких записано двоцифрове число. Розріжемо стрічку так, щоб на одній з її частин було записано шестицифрове число, а на решті – двоцифрове. Кількість різних варіантів розрізання стрічки таким способом дорівнює $\frac{1970}{2}-2=983$.

Розріжемо частину з шестицифровим числом навпіл. Підрахуємо суму T чисел на всіх частинах стрічки. Ця сума задовольняє такі нерівності:

$$\begin{aligned} &T > S - 99\cdot 3 + 2\cdot 111 = S - 75, \\ &T < S - 3\cdot 11 + 2\cdot 999 = S + 1965. \end{aligned} \qquad (1)$$

Між числами $S-75$ і $S+1965$ міститься

$$S - 1965 - (S - 75) - 1 = 2039$$

різних чисел. Отже, сума T може набувати не більше ніж 2039 різних значень. Через те, що числа T при діленні на 9 дають одну й ту саму остачу, кількість різних значень, які може набувати T, не більше за

$$\left[\frac{2039}{9}\right] + 1 = 226 + 1 = 227,$$

де символом $[x]$ позначається найбільше ціле число, що не перевищує x.

Оскільки різних варіантів розрізання стрічки зазначеним способом 983, то дістанемо стільки ж різних сум, а різних значень, яких можуть набувати ці суми, всього 227.

Отже, за принципом Діріхле принаймні п’ять сум рівні між собою.

6) У результаті розрізання смужки можна дістати два одноцифрових числа (1, 2), два двоцифрових (12 і 21), два трицифрових (121 і 212), ..., два n-цифрових. Кількість цифр на одержаних $2n$ паперових смужках дорівнює

$$2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + 2\cdot n = \frac{2(n+1)n}{2} = n(n+1).$$

Оскільки загальна кількість цифр не повинна перевищувати 1982, то маємо нерівність $n(n+1) \le 1982$. Таким чином, смужку не можна розрізати більше ніж на 88 частин. Спосіб розрізання смужки можна подати так:

1	21	212	1212	12121	...	2121	21212	12	121	2

Спочатку відрізаємо число 1 на лівому кінці смужки і 2 на правому. Потім відрізаємо зліва число 21, а справа 121 (дві цифри відрізати не можна, бо знову дістанемо 21); далі відрізаємо зліва 212, а справа 12 і т.д. Урешті-решт прийдемо до необхідності відрізати зліва смужку з 44 цифрами, а справа залишиться 46-цифрове число. Неважко підрахувати, що

$$2(1 + 2 + 3 + \ldots + 43) + 44 + 46 = 1982$$

7) У результаті розрізання смужки можна дістати три одноцифрових числа (1, 2, 3), три двоцифрових (12, 23, 31), три трьохцифрових (123, 231, 312) і т.д. Нехай маємо на шматочках смужки числа n-го розряду включно, причому жодні два числа не повторюються. Тоді кількість чисел буде $3n$, загальна кількість використаних при цьому цифр дорівнюватиме

$$3(1+2+...+n)=\frac{3}{2}n(n+1)=360,$$

звідки $n(n+1)=240$, $n=15$. Отже, найбільше число частин, на які можна розрізати смужку, дорівнює 45. спосіб розрізання смужки можна подати так:

1	2	3	12	31	23	123	1231	231	2312	312	3123	...

8) Дану різницю можна записати у вигляді

$$\overline{abc}-(a^3+b^3+c^3)=a(100-a^2)+b(10-b^2)+c(1-c^2). \qquad (1)$$

Оскільки кожній із цифр a, b і c можна надавати значень незалежно, то досить знайти найбільше значення кожного з доданків суми (1). Неважко перевірити, що перший набуває найбільшого значення для $a=6$, другий доданок – для $b=2$, третій – для $c=0$ або $c=1$. Тому найбільше значення вираз (1) набуває для чисел 620 і 621, і це значення дорівнює 396.

11 клас

1) Нехай $1\le a<p$. Оскільки сума

$$a^p+(p-a)^p=a^p+C_p^0p^p-C_p^1p^{p-1}a+...-C_p^{p-2}p^2a^{p-2}+C_p^{p-1}pa^{p-1}-a^p=$$
$$=p^2(C_p^0p^{p-2}-C_p^1p^{p-3}a+...-C_p^{p-2}a^{p-2})+p\cdot pa^{p-2}$$

ділиться на p^2, а кожне з чисел a^p і $(p-a)^p$ на p^2 не ділиться, то сума остач від ділення чисел a^p і $(p-a)^p$ на p^2 дорівнює p^2. Числа $1^p,2^p,3^p,...,(p-1)^p$ можна розбити на $\frac{p-1}{2}$ пар виду a^p і $(p-a)^p$. Тому остача від ділення суми $1^p+2^p+3^p+...+(p-1)^p$ на p^2 дорівнює $p^2\frac{p-1}{2}$.

2) Позначимо цифри заданого шестицифрового числа N через a,b,c,d,e,f. Тоді це число можна записати у вигляді

$$N=10^5a+10^4b+10^3c+10^2d+10e+f=\overline{abcdef}. \qquad (1)$$

Розглянемо число такого виду:

$$N_1=\overline{defabc} \qquad (2)$$

Доведемо, що коли N ділиться на 37, то на 37 ділитиметься й N_1. Для цього розглянемо різницю чисел (1) і (2), її можна записати так:

$$N-N_1=(10^5-10^2)a+(10^4-10)b+(10^3-1)c+(10^2-10^5)d+$$
$$+(10-10^4)e+(1-10^3)f.$$

Звідси $N_1=N-(10^3-1)(\overline{abc}-\overline{def})$.

Оскільки $10^3-1=999$ ділиться на 37 і за умовою задачі на 37 ділиться число N, то число N_1 також ділитиметься на 37. Отже, якщо $d \neq 0$, то число N_1 – шестицифрове, а отже, є шуканим. Нехай $d = 0$, тоді $l \neq 0$, оскільки всі цифри різні. У цьому випадку на 37 ділитиметься п'ятицифрове число $N_2 = \overline{efabc}$. Тоді на 37 ділитиметься й число $10 \cdot N_2$, тобто шестицифрове число $\overline{efabcd}$.

Зауваження. Із сказаного вище випливає така властивість чисел, які діляться на 37. Нехай деяке число N ділиться на 37. Розіб'ємо його справа наліво на грані по три в кожній. Тоді число $\overline{N}$, яке утворюється з цифр числа N в результаті перестановки будь-яких двох таких граней також ділитиметься на 37. Розіб'ємо число N на грані справа наліво по три цифри в кожній (остання грань може містити меншу кількість цифр). Число N ділиться на 37 тоді і тільки тоді, коли сума утворених трицифрових чисел ділиться на 37.

3) Розв'яжемо більш загальну задачу: доведемо, що при будь-якому натуральному n число $M = \overline{5\underbrace{599...9}_{n\text{ разів}}89\underbrace{33...3}_{n+1\text{ разів}}9}$ можна подати у вигляді суми квадратів трьох цілих чисел.

Справді, для будь-якого натурального n маємо

$$M = 55\cdot 10^{2n+4} + (10^n - 1)\cdot 10^{n+4} + 89\cdot 10^{n+2} + \frac{10^{n+1}-1}{3}\cdot 10 + 9 = 56\cdot 10^{2n+4} -$$

$$-\frac{32}{3}\cdot 10^{n+2} + \frac{17}{3} = \left(\frac{2}{3}\cdot 10^{n+2} + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\cdot 10^{n+2} - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{22}{3}\cdot 10^{n+2} - \frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\overbrace{200...01}^{n+1\text{ разів}}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\overbrace{399...93}^{n+1\text{ разів}}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\overbrace{2199...9}^{n+2\text{ разів}}}{3}\right)^2$$

Неважко переконатися, що вираз в кожних дужках є цілим числом, що й треба було довести.

4) Припустимо, що $2k$-цифрове число a є квадратом натурального числа і перші $k+1$ його цифри – одиниці. Тоді число $b = 9a$ є також квадратом натурального числа, причому це число або $2k$-цифрове, або $(2k+1)$-цифрове. У першому випадку щонайменше перші $k+1$ його цифр – дев'ятки, а в другому – після першої цифри "1" стоїть принаймні k нулів. Але жодне з чисел цих двох типів не може бути квадратом натурального числа. Справді, число $(10^k+1)^2 = 10^{2k} + 2\cdot 10^k + 1$ менше від будь-якого числа першого типу, бо в ньому після $k-1$ дев'яток стоїть цифра "8"; а число $(10^k+1)^2 = 10^{2k} + 2\cdot 10^k + 1$ після початкової одиниці містить рівно $k-1$ нулів і тому більше від будь-якого числа другого типу. Рівність $9a = (10^k)^2$ також неможлива, оскільки 10^k не ділиться на 3.

5) Нехай c – число, записане даною комбінацією цифр. Дописавши до числа c певну кількість нулів утворимо таке число $d = c \cdot 10^s$, щоб $a_1 < d$, $s \geq 1$. Нехай число d буде $(k+1)$-цифрове, тобто $10^k \leq d < 10^{k+1}$. Позначимо через a_p найбільший член даної послідовності, який менший від числа $d \cdot 10^{4k}$ (член послідовності з даними властивостями існує, бо $a_1 < d \leq d \cdot 10^{4k}$, а дана послідовність за умовою необмежено зростає). Тоді

$$d \cdot 10^{4k} \leq a_{p+1} \leq a_p + a_p^{\frac{3}{4}} < d \cdot 10^{4k} + d^{\frac{3}{4}} \cdot 10^{3k}$$

Оскільки $d^{\frac{3}{4}} < d$, то всі цілі числа в проміжку $[d \cdot 10^{4k}, d \cdot 10^{4k} + d^{\frac{3}{4}} \cdot 10^{3k}]$ розпочинаються цифрами числа c.

6) *<u>Перший спосіб</u>*. Якщо $\sqrt{n} = m{,}19851986{,}\ldots$, то

$$m + 0{,}19851986 \leq \sqrt{n} < m + 0{,}19851987 .$$

Тому число n повинно попадати в інтервал

$$[m^2 + 2m \cdot 0{,}19851986 + 0{,}19851986^2;\ m^2 + 2m \cdot 0{,}19851987 + 0{,}19851987^2) .$$

Щоб з'ясувати, чи містить цей інтервал натуральні числа, знайдемо його довжину:

$$m^2 - 2m \cdot 0{,}19851987 + 0{,}19851987^2 - (m^2 - 2m \cdot 0{,}19851986 + 0{,}19851986^2) =$$
$$= 2m \cdot 0{,}00000001 + (0{,}19851987^2 - 0{,}19851986^2) > 2m \cdot 10^{-8}.$$

Бачимо, що при $m \geq \frac{1}{2} \cdot 10^8$ довжина інтервалу більша за 1, а тому він напевне містить принаймні одне натуральне число, яке й задовольняє умову задачі.

<u>Зауваження</u>. Насправді ми довели навіть більше, ніж вимагалося в задачі, а саме: для кожного натурального числа $m \geq \frac{1}{2} \cdot 10^8$ знайдеться принаймні одне таке натуральне число n, що $\sqrt{n} = m{,}19851986\ldots$.

<u>Другий спосіб</u>. Розглянемо різницю

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} .$$

Бачимо, що коли n прямує до нескінченості, то ця різниця прямує до нуля. Зокрема, для всіх достатньо великих чисел n ця різниця буде меншою за 10^{-8}. Виберемо серед цих чисел два числа виду N^2 і $(N+1)^2$. Якщо n буде зростати від N^2 до $(N+1)^2$, то $\sqrt{n}$ буде зростати від N до $N+1$. Але оскільки при збільшенні числа n на 1 число $\sqrt{n}$ зростає менше ніж на 10^{-8}, то "перескочити" через інтервал $[N + 0{,}19851986;\ N + 0{,}19851987)$, довжина якого 10^{-8}, ми не зможемо, тобто обов'язково знайдеться таке число $N^2 \leq n \leq (N+1)^2$, що $\sqrt{n} \in [N + 0{,}19851986;\ N + 0{,}19851987)$.

Це число n і є шуканим.

7) Припустимо, якщо A – точний квадрат, то його остання цифра є $x^2 = 1,4$ чи 9. Тоді рівно одне з чисел $\sqrt{A}+x$ і $\sqrt{A}-x$ кратне 5, а значить і 5^k (k – кількість в $A+1$), і тому $A - x^2 > 9 \cdot 10^k$ – отримали суперечність.

8) Нехай $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$. Оскільки $2n-1$ – непарне число, добуток $A \cdot A^{2n-1} = (1A) \cdot (2A) \cdot \ldots \cdot ((2n-1)A)$ є квадратом, а співмножники $A, 2A, \ldots, (2n-1)A$ утворюють арифметичну прогресію.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бабинская И.Л.* Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.
2. *Васильев Н.Б., Егоров А.А.* Задачи всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, 1988. – 284 с.
3. *Вишенський В.А. та ін.* Конкурсні задачі з математики: Навч. посіб. /В.А. Вишенський, М.О. Перестук, А.М. Самойленко. – К.: Вища шк., 2001. – 432 с.
4. *Вишенський В.А., Карташев М.В., Михайловский В.І., Ядренко М.Й.* Київські математичні олімпіади 1984-1993 рр. – К.: Либідь, 1993.
5. *Вишенський В.А., Ядренко М.Й.* Збірник задач для учасників олімпіад юних математиків. – К.: Рад. шк., 1963. – 110 с.
6. *Гальперин Г.А., Толпыго А.К.* Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986. – 302 с.
7. *Гєнкін С.А., Ітенберг І.В., Фомін Д.В.* Ленінградські математичні гуртки. – К.: ТВіМС, 1997.
8. Заочные математические олимпиады /Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот М.Ж., Тоом А.Л. – М.: Наука, 1981. – 172 с.
9. Зарубежные математические олимпиады. /Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др; Под ред. И.Н. Сергеева. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – (Б-ка мат. кружка). 416 с.
10. *Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я.* Венгерские математические олимпиады. – М.: Мир, 1976. – 543 с.
11. *Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А.* Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв’язання. – Львів: Євросвіт, 1999.
12. *Морозова Е.А., Петраков И.С., Скворцов В.А.* Международные математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1976. – 288 с.
13. *Пойа Д.* Как решать задачу. – М.: Просвещение, 1959. – 244 с.
14. *Пойа Д.* Математическое открытие. – М.: Наука, 1972. – 448 с.
15. *Сарана О.А.* Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: Видавництво А.С.К., 2004. –344 с.
16. Сборник задач Киевских математических олимпиад / В.А. Вышенский, Н.В. Карташев, В.И. Михайловский, М.И. Ядренко – К.: Вища шк. Изд-во при

Киев. ун-те, 1984. – 238 с.

17.*Страшевич С., Бровкин Е.* Польские математические олимпиады. – М.: Мир, 1978. – 338 с.

18.*Триг Ч.* Задачи с изюминкой. – М.: Мир, 1975. – 302 с.

19.Українські математичні олімпіади: Довід. /В.А. Вишневський, О.Г. Ганюшкін, М.В. Карта шов та ін. – К.: Вища шк., 1993. – 415 с.

20.*Штейнгауз Г.* Сто задач. – М.: Наука, 1976. – 168 с.

21.*Яковлев Г.Н., Купцов Л.П., Резниченко С.В., Гусятников П.Б.* Всероссийские математические олимпиады школьников. – М.: Просвещение, 1992.

22.*Ясінський В.А.* Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Вінниця: Вінницький пед. ун-т, 1998.

Навчальне видання

Крок до олімпіади
(арифметика для школярів)

Андрій Ярославович Бомба,
Ірина Анатоліївна Барановська,
Ярема Григорович Сень

Набрано при кабінеті математики Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти
33028, м. Рівне, вул. Чорновола, 74