РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

БОМБА А.Я., КРОКА Л.Л.

МАТЕМАТИЧНІ ЗМАГАННЯ:

2012-2013 та 2013-2014 н.р.

Рівне – 2014

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

БОМБА А.Я., КРОКА Л.Л.

МАТЕМАТИЧНІ ЗМАГАННЯ:

2012-2013 та 2013-2014 н.р.

Рівне – 2014

Бомба А.Я., Крока Л.Л. (укладачі). Математичні змагання: 2012-2013 та 2013-2014 н.р. – Рівне: РДГУ, 2014. – 159с.

Зібрано завдання за 2012-2013 та 2013-2014 н.р., що пропонувались на учнівських математичних олімпіадах різного рівня: від обласних до міжнародних.

Посібник покликаний допомогти вчителю у проведенні позаурочної роботи з учнями, які бажають поглиблено вивчати математику, підготувати до участі в математичних олімпіадах. Буде корисний учням, що цікавляться математикою,студентам, вчителям загальноосвітніх шкіл, керівникам математичних гуртків.

Рецензенти: ***Я.Б. Петрівський*** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики РДГУ;

О.В. Крайчук – кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики та методики її викладання РДГУ;

Л.В. Пекарська – *методист* кабінету природничо-математичних предметів, технологій РОІППО.

Рекомендовано до друку Вченою Радою Рівненського державного гуманітарного університету, протокол № 2 від 26 вересня 2014р.

ЗМІСТ

ВСТУП

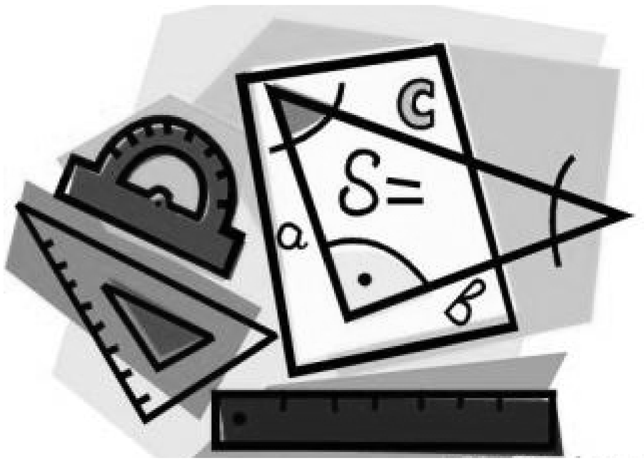
Олімпіадний рух виник понад сто років тому. Перші олімпіади відбулися в 1884 році в Австро-Угорщини. Вони виникли з конкурсних іспитів. Потім олімпіади з'явилися в Угорщині. Надалі олімпіадний рух ширився. Олімпіади вийшли за рамки конкурсних завдань. Виникла ціла система національних та міжнародних олімпіад. По всьому світу проводяться математичні конкурси та олімпіади. З'явилися фахівці з їх проведення, виникла олімпіадна математика зі своєю методикою роботи і своєю літературою. Олімпіадний світ став жити власним життям.

Розв'язання олімпіадних задач (різного рівня складності) служить основою для майже всіх математичних гуртків. Підготовка до олімпіад значно впливає на заняття школярів математикою. Саме у вирішенні складного завдання може складатися досягнення підлітка. Більш того, він найчастіше виявляється в рівному становищі з дорослим. На важких завданнях виробляється інтелектуальна техніка і відповідні вольові якості. Але головне - сам факт досягнення серйозної, але посильної мети в підлітковому віці.

В данім посібнику зібрано завдання 2012-2013 н.р. та 2013-2014 н.р., що пропонувались на учнівських математичних олімпіадах різного рівня: від обласних до міжнародних.

Посібник адресований учням, вчителям, керівникам гуртків і всім любителям математики.

РОЗДІЛ І.
УЧНІВСЬКІ МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ
2012-2013 Н.Р.



III ЕТАП ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

Завдання та розв'язки першого дня

7 КЛАС. РІВЕНЬ «А»

7.1. Знайдіть усі такі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, для яких виконується рівність $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2013$.

З умови маємо рівність $1111a + 111b + 11c + d = 2013$. Ураховуючи, що цифри не перевищують 9, послідовно однозначно отримуємо: $a = 1, b = 8, c = 1, d = 3$.

7.2 Серед 25 монет є рівно 2 фальшиві. Є чарівна скринька, в яку можна покласти 2 монети, і вона покаже кількість фальшивих монет у цій парі. Покажіть, як можна визначити обидві фальшиві монети не більше, ніж за 13 таких операцій.

Відокремимо три монети A, B, C. Решту монет розіб'ємо на пари і зробимо 11 *вимірів* для цих пар. При цьому якщо скринька показала «2», то фальшиві монети визначено. Розглядаємо інші випадки.

Випадок 1. Якщо скринька для всіх 11 вимірів показала «0», то серед монет A, B, C дві фальшиві. Далі ми покладемо до скриньки A і B, а потім A і C. Якщо скринька обидва рази показує «1», то фальшивими є B і C, в іншому випадку хоча б один раз скринька покаже «2».

Випадок 2. Скринька один раз показала «1», і нехай це було для пари монет D, E. Тоді ще перевіряємо D, A, а також D, B. Для показників «0» і «0» фальшивими будуть E, C, для «0» і «1» — E, B, для «1» і «0» — E, A, для «1» і «1» — монети D, C.

Випадок 3. Скринька два рази показала «1», і нехай це було для пар монет D і E, F і G. Тоді ще перевіряємо D і F, а також D і G. Для показників «0» і «1» фальшивими будуть E і G, для «1» і «0» — E і F. Інші ситуації або неможливі, або ж для них скринька покаже значення «2».

7.3. Петрик послідовно виписує в рядок на дошці остачі від ділення деякого натурального числа n на 10, 11, 12, ... , 20. Виявилося, що кожне наступне записане число більше за попереднє. Доведіть, що в рядку записано 11 *послідовних* цілих чисел (тобто кожне наступне число більше за попереднє на 1).

Остачі від ділення числа n на 10 і 20 або співпадають, або відрізняються на 10 (це випливає з рівностей $n = 10q + r, n = 20q_1 + r_1$, де $0 \le r \le 9,\ 0 \le r \le 19$). Перший випадок неможливий. У другому випадку між цими остачами буде 9 інших остач, і це мають бути послідовні натуральні числа.

Зауваження. Потрібну умову задовольняють усі числа $n = -9(\bmod M)$, де M — найменше спільне кратне чисел 10,11,... ,19, 20.

7.4. Прямокутне приміщення розділене на 16 прямокутних кімнат. Комендант виміряв периметри восьми кімнат. Сім з восьми результатів його вимірювань *схематично* (тобто без урахування справжніх розмірів кімнат)

показано на рис1.1., а результат восьмого позначено через x. Знайдіть значення x .

7		13	
		10	7
10	11		
	5		*x*

Рисунок 1. 1

Помітимо, що периметр усього приміщення дорівнює як сумі периметрів прямокутників, у яких записані літери A, B, C, D (рис.1.2), так і сумі периметрів прямокутників, що містять літери E, F, G, H . Тому $10 + 5 + 13 + 7 = 7 + 11 + 10 + x$. $x = 7$.

E		*C*	
		G	*D*
A	*F*		
	B		*H*

Рисунок 1. 2

Зауваження. Такі ситуації можливі. Усі вони зображені на рисунку 1.3. ($t \in (0; 2)$ — довільне).

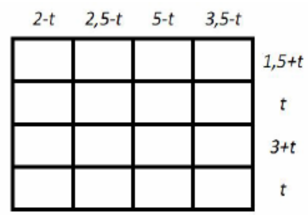


Рисунок 1. 3

7.5. З картону вирізано декілька прямокутників. На площині намальовано квадрат, сторона якого не менша за будь-яку сторону кожного з прямокутників, а периметр не менший за суму периметрів прямокутників. Доведіть, що всі вирізані прямокутники можна без перекриттів розмістити в намальованому квадраті (тобто будь-які два прямокутники можуть мати тільки такі спільні точки, які лежать на їхніх сторонах, і точки жодного з прямокутників не можуть вийти за межі квадрата).

У кожного прямокутника відмітимо найменшу сторону. Сума відмічених сторін не більша за чверть суми периметрів прямокутників, тому не більша за сторону квадрата. Отже, досить усі прямокутники викласти один за одним, приклавши їх «короткими» сторонами до однієї із сторін квадрата.

7 КЛАС. РІВЕНЬ «Б»

7.1. Див. задачу 1 рівня «А», 7 клас.

7.2. Серед 25 монет є рівно 2 фальшиві. Є чарівна скринька, в яку можна покласти 2 монети, і вона покаже кількість фальшивих монет у цій парі. Покажіть, як можна визначити обидві фальшиві монети не більше, ніж за 14 таких операцій.

Відокремимо монету A. Решту монет розіб'ємо на пари і зробимо 12 *вимірів* для цих пар. При цьому якщо скринька хоч раз покаже «2», то фальшиві монети визначено. Розглядаємо інші випадки.

Випадок 1. Скринька один раз показала «1», нехай це було в парі монет B *і* C. Тоді A фальшива, ще вимірюємо B *і* A, і за отриманим показником визначаємо, яка з монет B *і* C є другою фальшивою.

Випадок 2. Скринька два рази показала «1», нехай це було для пар монет B *і* C, D *і* E. Тоді ще перевіряємо пару B *і* D, а також пару B *і* E. Для показників «0» і «1» фальшивими будуть монети С і Е, для «1» і «0» — монети B *і* E. Інші ситуації або неможливі, або ж для них скринька покаже значення «2».

Зауваження. Також можна використати алгоритм, описаний у розв'язанні задачі 2 рівня «А».

7.3. Андрій, Микола, Олена, Сергій і Дарина посіли п'ять перших місць на математичній олімпіаді (жодне з місць не було розділено між декількома учасниками). Кожен з них знає, яке місце він зайняв. Олена знає, що різниця місць Сергія й Андрія (у вказаному порядку) дорівнює двом. Також вона знає, що Дарина зайняла не перше місце, і тому Олена може відновити розподіл місць між цією п'ятіркою учасників олімпіади. Яке місце зайняла Дарина?

Андрій і Сергій посіли, відповідно, або місця 1 і 3, або місця 2 і 4, або місця 3 і 5. Якщо Олена зайняла місце 3, то Андрій і Сергій отримали місця 2 і 4, а Дарина — місце 5. Якщо місце Олени відмінне від третього, то є два варіанти місць Андрія і Сергія, у кожному з яких Олена може мати місце, відмінне від першого, і тому Олена не може однозначно визначити розподіл місць для цієї п'ятірки учнів.

7.4. Див. задачу 3 рівня «А», 7 клас.

7.5. Див. задачу 4 рівня «А», 7 клас.

8 КЛАС. РІВЕНЬ «А»

8.1. Чебурашка та Крокодил Гена з'їли торт. Чебурашка їв удвічі повільніше за Крокодила Гену, але почав їсти на хвилину раніше. З'ясувалося, що вони з'їли порівну. За який час Чебурашка сам з'їв би цей торт?

За першу хвилину Чебурашка мав з'їсти стільки ж, скільки з'їв одночасно з Крокодилом Геною. Усього він з'їв половину торта, тому за хвилину він з'їв одну четверту частину торта.

Відповідь: за 4 хвилини.

8.2. Відомо, що трицифрове число $\overline{mnk}$ на 1 більше за трицифрове число $\overline{abc}$. Доведіть, що число $\overline{abcmnk}$ не може ділитися без остачі на 13.

Маємо:
$\overline{abcmnk} = 1000\overline{abc} + \overline{mnk} = 1000\overline{abc} + \overline{abc} + 1 = 1001\overline{abc} + 1$.
Оскільки 1001 ділиться без остачі на 13, то $\overline{abcmnk}$ на 13 не ділиться.

8.3. На дошці написані числа 1, 2, 3, ... , 4027, 4028. Миколка та Андрійко по черзі закреслюють числа, причому Миколка ходить першим. За один хід можна закреслити тільки одне з раніше незакреслених чисел. Андрійко хоче, щоб після його 2013-го ходу на дошці залишилися два *послідовні* числа (тобто числа, різниця яких дорівнює 1). Чи завжди він зможе цього досягти?

Розіб'ємо числа на 2014 пар: (1,2), (3,4), ... , (4027,4028). Якщо Миколка своїм ходом закреслює число однієї з пар, то Андрійко відповідає закресленням іншого числа в тій же самій парі. Після 2013-го ходу Андрійка залишаються два числа з однієї пари.

Відповідь: так, зможе.

8.4. Знайдіть усі пари простих чисел p і q, для яких число $p^3 + q^2$ є кубом деякого натурального числа.

Нехай $p^3 + q^2 = n^3, q^2 = n^3 - p^3 = (n-p)(n^2 + np + p^2)$.
Оскільки число q просте і $n - p < n^2 + np + p^2$, маємо $n - p = 1$, і

$$q^2 = 3p^2 + 3p + 1 \ (*),$$

$$(q-1)(q+1) = 3p^2 + 3p.$$

Тому $q-1$ або $q+1$ ділиться без остачі на просте число p. Але ж з рівності (*) знаходимо, що

$$(p+1)^2 < q^2 < (2p+1)^2, p+1 < q < 2p+1,$$

$$p < q-1 < 2p, \ \ p+2 < q+1 < 2p+2.$$

Отже, $q-1$ не буде ділитись без остачі на p, і кратним p буде число $q+1$. З останньої нерівності випливає, що можливим є тільки випадок $q+1 = 2p$, тобто $q = 2p-1$. Підставляючи $q = 2p-1$ до (*), отримуємо: $p = 7, q = 13$.

8.5. У гострокутному трикутнику ABC проведено бісектриси AA_1 і BB_1. Відомо, що на відрізку CB_1 існує така точка M, що $CM = CA_1$. Через точку M проведено пряму, паралельну BB_1, яка перетинає пряму AB в точці N. Доведіть, що.

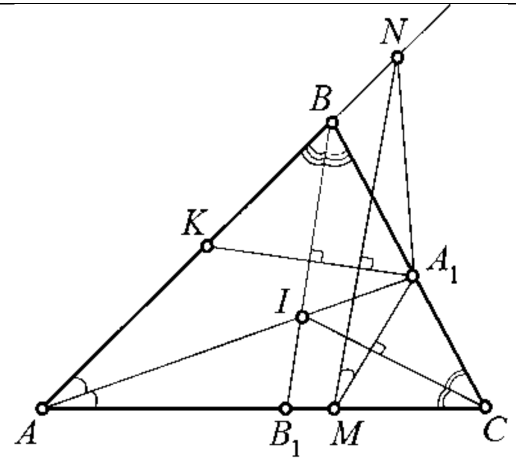


Рисунок 1. 4

Позначимо через I точку перетину бісектрис і проведемо $A_1K \perp BB_1$ (див. рис.1.4). Тоді трикутники BA_1K, CA_1M рівнобедрені. Отже,

$$\angle BA_1K = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC, \angle CA_1M = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\angle MA_1K = 180° - \frac{1}{2}\angle BA_1K - \frac{1}{2}\angle CA_1M = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC.$$

За умовою, $MN \parallel BB_1$, тому $MN \perp A_1K$, і $\angle NMA_1 = 90° - \angle MA_1K = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle A_1AM$.

Відтак, точки A, M, A_1, N лежать на одному колі, і $A_1N = A_1M$ як хорди цього кола, на які спираються рівні кути.

8 КЛАС. РІВЕНЬ «Б»

8.1. Див. задачу 1 рівня «А», 8 клас.

8.2. Керівник математичного гуртка дав учням завдання виписати в порядку зростання всі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, в яких $1 \le a < b < c < d \le 9$. Яке число буде записаним на 53-му місці?

Перші 6 чисел — це 1234, 1235, ..., 1239, наступні 5 чисел — 1245, ... , 1249, далі маємо 4 числа вигляду 125d, 3 числа вигляду 126d, 2 числа вигляду 127d, і 21-м буде число 1289. Аналогічно, з комбінації цифр 13 буде починатись 5 + 4 + 3 + 2 +1 = 15 чисел, з комбінації цифр 14 — 4 + 3 + 2 +1 = 10 чисел, з комбінації цифр 15 — 3 + 2 +1 = 6 чисел. Отже, на 53-му місці буде - 1678.

8.3. Див. задачу 3 рівня «А», 8 клас.

8.4. Дано гострокутний трикутник *ABC*. Кола k_1, k_2 проходять через вершину *A* і дотикаються до прямої *BC* в точках *B* і *C* відповідно. Висота *BK* трикутника *ABC* перетинає коло k_1 у точці *P*, відмінній від *B*, а висота *CL* перетинає коло k_2 в точці *Q*, відмінній від *C*. Доведіть, що точки *A*, *P* і *Q* лежать на одній прямій.

Нехай $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$ — кути трикутника *ABC* (рис.1.5). Тоді, використовуючи теорему про суму кутів

трикутника й теорему про кут між дотичною та хордою, одержимо:

$\angle CAP = \alpha - \angle BAP = \alpha - \angle CBP = \alpha - \angle CBK = \alpha - (90° - \gamma) =$
$= \alpha + \gamma - 90° = 90° - \beta = \angle BCL = \angle BCQ = \angle CAQ,$

Тобто $\angle CAP = \angle CAQ$.

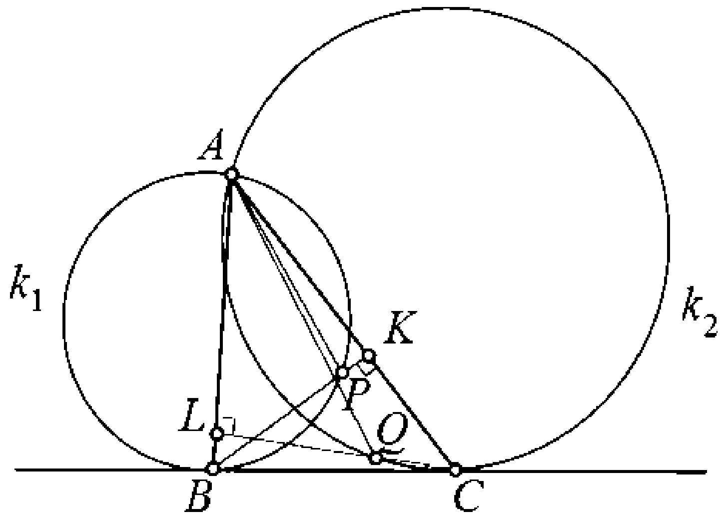


Рисунок 1. 5

Оскільки точки *P* і *Q* лежать по один бік від прямої *AC*, то точки *A*, *P* і *Q* лежать на одній прямій.

8.5. Див. задачу 4 рівня «А», 8 клас.

9 КЛАС. РІВЕНЬ «А»

9.1. Відомо, що $a \ne b$ та рівняння $ax^{2013} + x^{2012} + b = 0$ і $bx^{2013} + x^{2012} + a = 0$ мають спільний дійсний корінь. Знайдіть $a + b$.

Нехай x_0 — спільний корінь цих рівнянь. Тоді $ax_0^{2013} + b = bx_0^{2013} + a$, $(a-b)x_0^{2013} = a - b$. Оскільки $a \ne b$, то $x_0 = 1$. Отже, $a + b = -1$.

9.2. Знайдіть усі такі пари простих чисел p і q , для яких має місце рівність $p^5-(4p-q)^2=2q^2$.

Запишемо вихідну рівність у вигляді $p(p^4-16p+8q)=3q^2$. Отже, $3q^2\,\vdots\,p$. Звідси випливає, що $p=3$ або $q=p$. Для $q=p$ маємо: $p^4-8p=3p$, $p^3=11$, що неможливо. Якщо $p=3$, то $q^2-8q-33=0$, $q=-3$, $q=11$. Отже, $p=3, q=11$.

9.3. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел a, b і c виконується нерівність $3a^2+b^2+c^2+bc\geq 3a(b+c)$.

Оскільки для всіх дійсних x і y

$$x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}\left((x+y)^2+x^2+y^2\right)\geq 0$$

то $(a-b)^2+\left(a-b\right)(a-c)+(a-c)^2\geq 0$, звідки випливає потрібна нерівність.

Зауваження. Наведемо інший спосіб доведення нерівності. Розглянемо вираз $3a+3(b+c)a+(b^2+c^2+bc)$ як квадратний тричлен відносно a. Його дискримінант $3\,(3(b+c)^2-4\,(b^2+c^2+bc))=-3(b-c)^2\leq 0$ і тому наш вираз для всіх a, b і c набуває тільки невід'ємних значень.

9.4. Нехай H — точка перетину висот AQ, BL і CP гострокутного трикутника ABC, K — спільна точка відрізків PQ і BH, M — середина сторони AC, N — середина відрізка BH. Промінь BL перетинає описане коло трикутника ABC в точці D, відмінній від B. Відомо, що $KQ = HQ$. Доведіть, що прямі MN і AD перпендикулярні.

Точка M — середина спільної гіпотенузи AC прямокутних трикутників PAC і QAC (рис.1.6), тому $PM = QM$. Аналогічно, точка N — середина спільної гіпотенузи

BH прямокутних трикутників PBH і QBH, звідки $PN = QN$. Отже, $PQ\perp MN$. Залишається довести, що $PQ\parallel AD$, тобто $\angle BKP=\angle BDA$. Навколо чотирикутника $PBQH$, в якому $\angle P=\angle Q=90^\circ$, можна описати коло, і тому $\angle QHB=\angle QPB$. Далі, чотирикутник $ACQP$ також є вписаним, і $\angle ACQ=180^\circ-\angle APQ=\angle BPK$. З урахуванням рівностей $\angle QHB=\angle QKH=\angle BKP$, $\angle BDA=\angle ACQ$ маємо потрібний результат.

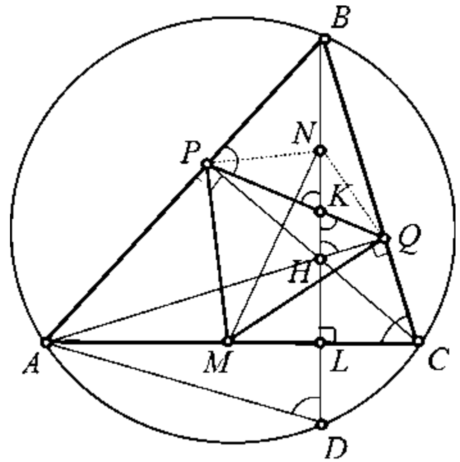


Рисунок 1. 6

Зауваження. Як добре відомо, точки H і D симетричні відносно прямої AC. Тому $\angle ADH=\angle AHD=\angle QHK=\angle QKH$, звідки випливає паралельність прямих PQ і AD .

9.5. Керівник математичного гуртка намалював на дошці таблицю розміру 30х30 і запропонував учням заповнити її числами 1, 2, ... , 900, записуючи щосекунди в якусь порожню клітинку на свій розсуд одне з тих чисел, що не використовувалось раніше. Чи зможуть учні виконати завдання так, щоб у будь-який момент ані в жодному рядку, ані в жодному стовпці сума всіх записаних чисел не давала остачу 1 від ділення на 3?

Доведемо, що це можливо. Серед чисел 1, 2, ... , 900 остачу 1 від ділення на 3 дають 300 чисел, остачу 2 дають також 300 чисел, і 300 чисел є кратними 3. Розіб'ємо таблицю на 225 квадратів розміру 2 х 2. Візьмемо спочатку 150 квадратів. У кожному з них спочатку на одній діагоналі записуємо два числа, що дають остачу 2 від ділення на 3, після чого на другій його діагоналі — два числа, що дають остачу 1 від ділення на 3. Решту 75 квадратів довільно заповнюємо числами, які діляться на 3 без остачі.

Відповідь: так, зможуть.

9 КЛАС. РІВЕНЬ «Б»

9.1. Сума двох натуральних чисел дорівнює 20132013, і якщо в одному з них закреслити останню цифру, то отримаємо друге число. Знайдіть усі такі пари чисел.

Нехай n — менше з цих чисел, а x, $0 \le x \le 9$, — закреслена цифра в більшому з чисел. Тоді $n + 10n + x = 20132013$, $11n + x = 20132013$. Оскільки $20132013 \vdots 11$, то $x = 0, n = 1830183$.

Відповідь: 1830183, 18301830.

9.2. Див. задачу 2 рівня «А», 9 клас.

9.3. У трапеції $ABCD$ з основами $AD, BC, AD > BC$, діагоналі AC, BD перетинаються в точці E. Дотична до описаного кола трикутника BCE, проведена в точці E, перетинає пряму AD в точці F так, що точка D лежить між точками A і F. Відомо, що $AF = a$, $AD = b$. Знайдіть довжину відрізка EF .

Трикутники AEF і EDF (рис.1.7) подібні, бо вони мають спільний кут F, і $\angle FAE = \angle ACB = \angle FED$ (ми використали той факт, що кут між дотичною EF і хордою BE дорівнює вписаному куту BCE). З подібності цих

трикутників випливає пропорція $\dfrac{AF}{EF} = \dfrac{EF}{DF}$. Отже, $EF^2 = AF \cdot DF = a(a-b)$.

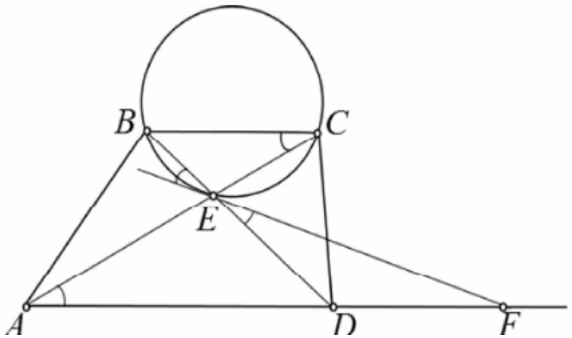


Рисунок 1. 7

9.4. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел x, y і z має місце нерівність.

Запишемо цю нерівність у вигляді

$$\frac{x(y-x)}{x+y} + \frac{y(z-y)}{y+z} \le \frac{z-y}{2} + \frac{y-x}{2}.$$

Маємо:

$$\frac{x(y-x)}{x+y} \le \frac{y-x}{2} \Leftrightarrow (y-x)\left(\frac{x}{x+y} - \frac{1}{2}\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-x)(x-y) \le 0 \Leftrightarrow -(x-y)^2 \le 0.$$

Аналогічно доводиться нерівність $\dfrac{y(z-y)}{y+z} \le \dfrac{z-y}{2}$.

З доведених нерівностей випливає потрібна.

9.5. Див. задачу 5 рівня «А», 9 клас.

10. КЛАС. РІВЕНЬ «А»

10.1. Розв'яжіть рівняння $x^{2013}-x^{2014}=\left\{\dfrac{2015+x}{1+[x]}\right\}$ (тут $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a; $\{a\}=a-[a]$ — дробова частина числа a).

З необхідністю, $x^{2013}(1-x)\ge 0$, тобто $0\le x\le 1$. Неважко бачити, що $x=0, x=1$ є коренями рівняння.

Для $x\in(0;1)$ $[x]=0$, $\{2015+x\}=\{x\}=x$, $x^{2013}<x+x^{2014}$.

Відповідь: $x=0, x=1$.

10.2. Натуральне число a має рівно 6 різних натуральних дільників (включаючи 1 і саме число a). Аналогічно, натуральне число b має рівно 9 різних натуральних дільників, а натуральне число c має рівно 14 різних натуральних дільників. Відомо, що $НСД(a,b,c)=10$. Знайдіть усі можливі значення добутку НСД(a,b)•НСД(b,c)•НСД(c,a). (Тут НСД(x,y) — найбільший спільний дільник натуральних чисел x і y, НСД (a,b,c) — найбільший спільний дільник натуральних чисел a, b і c .)

Нагадаємо, що якщо $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{\alpha_m}$ — *канонічний* розклад натурального числа $n>1$, то кількість $\tau(n)$ усіх його натуральних дільників (включаючи 1 та саме число n) знаходиться за формулою $\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_m+1)$. Число m називається *довжиною* канонічного розкладу. Оскільки 6= 2•3, 9=3•3, 14=2•7, то, як легко бачити, довжина канонічного розкладу кожного з чисел a, b і c дорівнює 2. Числа a, b і c діляться без остачі на 10. Звідси $b=2^2\bullet 5^2, a=2^1\bullet 5^2$ або $a=2^2\bullet 5^1, c=2^1\bullet 5^6$ або $c=2^6\bullet 5^1$. З урахуванням умови

НСД (a,b,c)=10 знаходимо, що можливими є тільки такі випадки:

$$a=2^1\bullet 5^2,\ b=2^2\bullet 5^2,\ c=2^6\bullet 5^1;$$
$$a=2^2\bullet 5^1,\ b=2^2\bullet 5^2,\ c=2^1\bullet 5^6.$$

Для обох цих випадків НСД(a,b)•НСД(b, c)•НСД(c, a)=2^4•5^4=10000.

Відповідь: 10 000 .

10.3. Відомо, що додатні дійсні числа x, y і z задовольняють нерівність $3x+4y+6z\le 12$. Доведіть, що $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le 3$.

Оскільки $3x+4y+6z\le 12$, то $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}\le 1$.

Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{\frac{x}{4}}\cdot\sqrt{4}+\sqrt{\frac{y}{3}}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{\frac{z}{2}}\cdot\sqrt{2}\le$$
$$\le\sqrt{\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}}\cdot\sqrt{4+3+2}\le\sqrt{1}\cdot\sqrt{9}=3.$$

10.4. Нехай AK, BL і CM — висоти гострокутного трикутника ABC. Відомо, що LM = 5 см, МК = 12 см, KL = 13 см. Обчисліть площу трикутника ABC.

Оскільки $\dfrac{AL}{AB}=\cos\angle A=\dfrac{AM}{AC}$, то трикутник ALM подібний трикутнику ABC з коефіцієнтом $\cos\angle A$. Аналогічно, трикутнику ABC подібні й трикутники BMK і CKL з коефіцієнтами $\cos\angle B$ і $\cos\angle C$ відповідно (рис.1.8).

Тому

$$S_{MKL}=S_{ABC}-S_{ALM}-S_{BMK}-S_{CKL}=$$
$$=S_{ABC}-\cos^2\angle A\cdot S_{ABC}-\cos^2\angle B\cdot S_{ABC}-\cos^2\angle C\cdot S_{ABC}=$$
$$=\left(1-\cos^2\angle A-\cos^2\angle B-\cos^2\angle C\right)S_{ABC}.$$

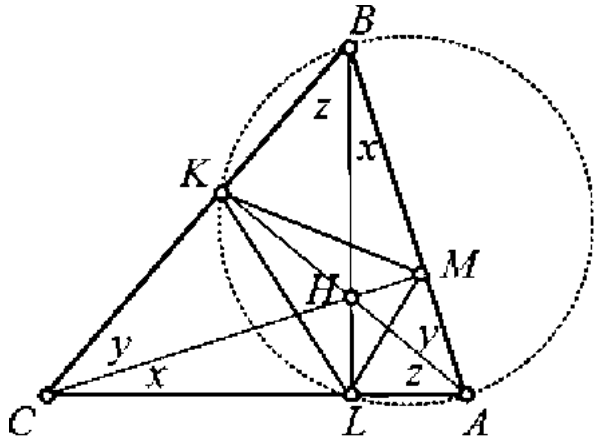


Рисунок 1. 8

Легко встановити, що трикутник *MKL* прямокутний, $\angle KML = 90°$, а тому $S_{MKL} = 30$ см^2.

Коло діаметром *AB* проходить через точки *K* і *L*, оскільки $\angle AKB = \angle ALB = 90°$.

Отже, $\angle AKL = \angle ABL = x = 90° - \angle A = \angle ACM$. Аналогічні співвідношення одержуємо для кутів *x, y* і *z*, відмічених на рисунку 1.8. Із прямокутних трикутників *ALB, BKA* і *CLB* одержуємо:

$$1-\cos^2\angle A-\cos^2\angle B-\cos^2\angle C=$$
$$=1-\sin^2 x-\sin^2 y-\sin^2 z=$$
$$=1-\frac{1-\cos 2x}{2}--\frac{1-\cos 2y}{2}-\frac{1-\cos 2z}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z-1\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\angle MKL+\cos\angle KLM+\cos\angle LMK-1\right)=\frac{2}{13}.$$

Отже, $S_{ABC} = 195$ *см*^{2}.

10.5. По колу записали 672 натуральних числа $a_1, a_2, \ldots, a_{672}$, серед яких немає жодних двох рівних,

причому відомо, що $a_1 + a_2 + \ldots + a_{672} = 2013, a_k \neq 1342$, і a_k Ф 1342 для всіх k, $1 \le k \le 672$. Доведіть, що завжди можна вибрати декілька записаних поспіль чисел, сума яких дорівнює 1342.

Розіб'ємо деяке коло 2013 точками на 2013 рівних дуг. Серед цих точок відмітимо 672 точки *M*0, М1, ... , *M*671 так, щоб кожна з дуг M_iM_{i+1}, $0 \le i \le 671$, виявилась розбитою на a_{i+1} рівих дуг (вважаємо, що *M*672 = *M*0). Точки *M*0, М1, ... , *M*671 пофарбуємо в чорний колір, а решту — 2013-672=1341 точку — пофарбуємо в білий. Зауважимо, що 2013 ділиться без остачі на 3. Розглянемо всі такі рівносторонні трикутники з вершинами в наших 2013 точках (кожен рівносторонній трикутник з вершинами в наших 2013 точках однозначно визначається будь-якою своєю вершиною), які мають хоча б одну чорну вершину. Якби в кожного з них дві інші вершини були білі, то загалом білих точок було б не менше, ніж 2•672 = 1344, що неможливо, бо їх 1341. Тому знайдеться рівносторонній трикутник, у якого є дві чорні вершини. Менша дуга з кінцями в цих вершинах буде розбитою на 671 рівну частина, а більша складається з декількох дуг (щонайменше — з двох) з чорними кінцями, причому сумарно ці дуги складаються саме з 1342 рівних частин (з тих 2013 частин, на які розбито коло). Числа з набору $a_1, a_2, \ldots, a_{672}$, які відповідають цим дугам, є шуканими.

10 КЛАС. РІВЕНЬ «Б»

10.1. Чи можна зобразити на прямій шість відрізків так, щоб серед будь-яких трьох зображених відрізків знайшлися принаймні два, які мають хоча б одну спільну точку, і кожна точка прямої належала щонайбільше трьом зображеним відрізкам? (Вважається, що кінці відрізків належать самим відрізкам.)

Умову задовольняють відрізки [0;1], [0;2], [0;3], [2;5], [3;5] і [4;5].

Відповідь: так, можна.

10.2. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел m і n, для яких виконується рівність $mn-\sqrt{m^2+n^2}=7.$

Число $\sqrt{m^2+n^2}=mn-7$ є натуральним. Отже,

$$mn=\sqrt{m^2+n^2}+7, 2mn=2\sqrt{m^2+n^2}+14,$$

$$m^2+n^2+2mn=m^2+n^2+2\sqrt{m^2+n^2}+14,$$

$$(m+n)^2-\left(\sqrt{m^2+n^2}+1\right)^2=13,$$

$$\left(m+n+\sqrt{m^2+n^2}+1\right)\left(m+n-\sqrt{m^2+n^2}-1\right)=13.$$

Оскільки число 13 просте, і числа в дужках останньої рівності (яка, зауважимо, є рівносильною рівності з умови) є натуральними, причому

$$m+n-\sqrt{m^2+n^2}-1<m+n+\sqrt{m^2+n^2}+1,$$

$$\begin{cases} m+n-\sqrt{m^2+n^2}-1=1, \\ m+n+\sqrt{m^2+n^2}+1=13. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, знаходимо відповідь: $m=3, n=4; m=4, n=3.$

10.3. Відомо, що додатні дійсні числа x і y задовольняють нерівність $2x+7y\le 14$. Доведіть, що $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 3.$

Оскільки $2x+7y\le 14$, то $\frac{x}{7}+\frac{y}{2}\le 1$. Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\frac{x}{7}}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{\frac{y}{2}}\cdot\sqrt{2}\le\sqrt{\frac{x}{7}+\frac{y}{2}}\cdot\sqrt{7+2}\le\sqrt{1}\cdot\sqrt{9}=3$$

10.4. Див. задачу 4 рівня «А», 9 клас.

10.5. Див. задачу 5 рівня «А», 10 клас.

11 КЛАС. РІВЕНЬ «А»

11.1. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок, координати яких задовольняють рівність $\sin x+\cos y=\sin y+\cos x$.

Маємо:

$$\sin x-\sin y+\cos y-\cos x=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}+2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}=$$

$$=2\sin\frac{x-y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{\pi+x+y}{2}\right)=2\sin\frac{x-y}{2}\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}.$$

Звідки випливає, що треба зобразити дві сукупності паралельних прямих:

$$y=x+2\pi k, k\in Z;$$

$$y=-x+\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$$

11.2. Для $x\in(0;1), y\in(0;1)$ знайдіть найбільше можливе значення виразу $\frac{xy(1-x-y)}{(x+y)(1-x)(1-y)}$.

Для $x=y=1/3$ значення цього виразу дорівнює $1/8$. Доведемо, що шуканим найбільшим значенням є $1/8$.

Якщо $x+y\ge 1$, то $\frac{xy(1-x-y)}{(x+y)(1-x)(1-y)}\le 0.$

Якщо $x+y<1$, то позначимо $z=1-x-y.$ Тоді слід довести, що $xyz\le\frac{1}{8}(x+y)(y+z)(z+x).$ Дана нерівність одержується з нерівностей $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}; \sqrt{yz}\le\frac{y+z}{2}; \sqrt{xz}\le\frac{x+z}{2}.$

11.3. Нехай вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB, AC і BC в точках D, E і F відповідно. Пряма, яка проходить через точку F і центр цього кола, перетинає відрізок DE в точці L . Доведіть, що пряма AL проходить через середину сторони BC .

Позначимо $\angle A=\alpha, \angle B=\beta, \angle C=\gamma.$ Нехай пряма AL перетинає сторону BC в точці M (рис.1.9).

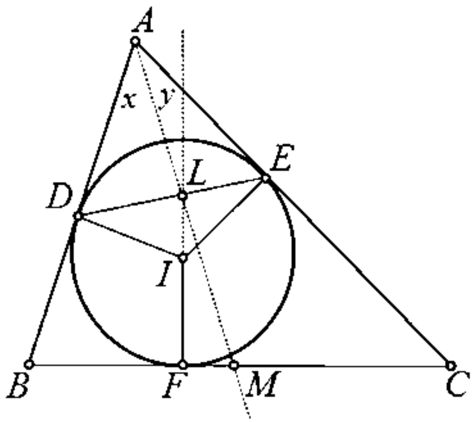


Рисунок 1. 9

Легко бачити, що $\angle DIL=180°-\angle DIF=\beta.$ Аналогічно, $\angle EIF=\gamma$. За теоремою синусів

$$\frac{DL}{DI}=\frac{\sin\angle DIL}{\sin\angle DLI}=\frac{\sin\beta}{\sin\angle DLI},$$

$$\frac{EL}{EI}=\frac{\sin\angle EIL}{\sin\angle ELI}=\frac{\sin\gamma}{\sin\angle ELI}.$$

Звідси $\dfrac{DL}{EL}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma},$ оскільки $DI = EI$ як радіуси вписаного кола.

Далі, з урахуванням рівностей $\sin\angle AMB=\sin\angle AMC,\ AD=AE\ \ AD=AE$, за теоремою синусів знаходимо

$$\frac{BM}{CM}=\frac{AB\sin x}{AC\sin y},\quad \frac{DL}{EL}=\frac{AD\sin x}{AE\sin y}=\frac{\sin x}{\sin y}.$$

Нарешті,

$$\frac{BM}{CM}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{DL}{EL}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=1.$$

що й потрібно довести.

11.4. Знайдіть усі такі визначені на множині всіх дійсних чисел числові функції f, що для будь-яких $x, y\in R$ має місце рівність $f(xf(y))+f(y+f(x))-f(x+yf(x))=x$.

Нехай $x=0, y=0$. Тоді $f(0)+f(f(0))-f(0)=0$,тобто $f(f(0))=0.$

Нехай $x=1, y=1$. Тоді $f(f(1))+f(1+f(1))-f(1+f(1))=1$, тобто $f(f(1))=1.$

Нехай $x=1, y=0$. Тоді $f(f(0))+f(f(1))-f(1)=1$, тобто $f(1)=0.$ Із рівності $f(1)=0$ випливає, що $f(f(1))=f(0)$, тобто $f(0)=1$.

Нехай x – довільне, $y=0$. Тоді $f(xf(0))+f(f(x))-f(x)=x,$ $f(x)+f(f(x))-f(x)=x,$ і маємо, що для всіх $x\in R$ $f(f(x))=x.$

Нехай $x=1, y$ — довільне. Тоді, з урахуванням рівності $f(1)=0,$ одержуємо:

$$f(f(y))=f(y+f(1))-f(1-yf(1))=1,$$

$$f(f(y))+f(y)=1,$$

$$f(y)=1-f(f(y)),\ f(y)=1-y.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що функція $f(x)=1-x$ задовольняє умову задачі.

11.5. Див. задачу 5 рівня «А», 10 клас.

11 КЛАС. РІВЕНЬ «Б»

11.1. Див. задачу 1 рівня «А», 11 клас.

11.2. Див. задачу 1 рівня «А», 10 клас.

11.3. У трикутнику *ABC* *AB* = 16 см, *BC* = 25 см, *AC* = 39 см. Пряма, яка проходить через центр вписаного кола трикутника *ABC* і середину *M* сторони *BC*, перетинає висоту *AD* цього трикутника в точці *P*. Знайдіть довжину відрізка AP .

Нехай *I* — центр вписаного кола трикутника *ABC*, *K* — точка дотику вписаного кола до сторони *BC*. Легко встановити, що кут *ABC* тупий (рис.1.10). За формулою Герона обчислюємо площу *S* трикутника *ABC*, потім за формулою $r = \dfrac{S}{p}$, де *p* — півпериметр трикутника *ABC*, знаходимо радіус вписаного кола: *S* = 120 см , *r* = 3 см. Звідси $AD = \dfrac{2S}{BC} = 9,6\ см$.

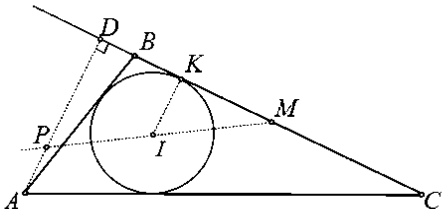


Рисунок 1. 10

За теоремою Піфагора, $BD = \sqrt{16^2 - 9.6^2} = 12.8 см$. Як відомо, відрізок дотичної $BK = p - AC = 40 - 39 = 1$ см. Отже, $KM = BM - BK = 11,5$ см. Трикутники *MKI* та *MDP* подібні, і тому $PD = \dfrac{IK \cdot KM}{DM}$, $PD = 6,6$ см. Відтак, *AP* =3 см.

11.4. Див. задачу 4 рівня «А», 11 клас.

11.5. Нехай x_1 — довільне дійсне число, і для всіх натуральних *n* виконується рівність $x_{n+1} = \sqrt{7}x_n + 2\sqrt{x_n^2 + 4}$. Доведіть, що серед чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2013}$ принаймні 1005 чисел є ірраціональними.

Якщо серед елементів послідовності $\{x_n\}_{n\geq 1}$ є рівний нулю, то легко бачити, що всі наступні (тобто з більшими індексами) елементи є додатними, а тому серед чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2013}$ є не більше одного, рівного нулю (якщо $i < j, x_i = x_j = 0$, то x_j мусить бути додатним, і маємо суперечність).

З даного рекурентного співвідношення одержуємо $2x_n x_{n+1}\sqrt{7} = 3x_n^2 + x_{n+1}^2 - 16$ для всіх n . А тому x_n та x_{n+1} можуть бути одночасно раціональними числами тоді й тільки тоді, коли одне з них є нулем (якщо $x_n \neq 0,\ x_{n+1} \neq 0$, то ми отримаємо, що $\sqrt{7}$ є раціональним числом, що неможливо).

Звернемо увагу на те, що коли для деякого *n* $x_n = 0$, то $x_{n+1} = 4$. Розглянемо пари $(x_1, x_2),\ (x_3, x_4),\ \ldots,\ (x_{2011}, x_{2012})$. Якщо $x_k \neq 0, \forall k: 1 \leq k \leq 2012$, то серед чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2012}$ не менше за 1006 ірраціональних (хоча б одне в кожній парі). Якщо серед чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$ є нуль, то в парі з ним другим елементом буде число 4, і це означатиме, що серед цих пар є пара (0, 4) — єдина пара, обидва елементи якої — раціональні числа. Кожна з решти розглядуваних пар повинна містити ірраціональне число, і тому серед чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2012}$ щонайменше 1005 ірраціональних. Якщо нуль міститься серед чисел $x_2, x_2, \ldots, x_{2012}$ то в парі з ним другим елементом буде від'ємне ірраціональне число $-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$, і тому ірраціональних чисел серед $x_1, x_2, \ldots, x_{2012}$ буде не менше, ніж 1006.

Завдання та розв'язки другого дня
(м. Рівне)

7 КЛАС

7.1. З пункту A в напрямі до пункту B о 10-ій годині виїхали автомобіль і мотоцикліст, а через півгодини з пункту B виїхав велосипедист (в напрямі до пункту A) і вийшов пішохід (в напрямі від A). Автомобіль зустрів велосипедиста об 11-ій годині і ще через півгодини наздогнав пішохода, а мотоцикліст наздогнав пішохода у 12-ій годині 30 хвилин. О котрій зустрілися мотоцикліст і велосипедист? (Швидкості і напрями руху всіх учасників сталі)

Позначимо швидкості автомобіля, мотоцикліста, велосипедиста і пішохода через v_1, v_2, v_3, v_4 відповідно, відстань між A і B через S. Складаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} v_1 + \frac{1}{2}v_3 = S, \\ \frac{3}{2}v_1 = S + v_4, \\ \frac{5}{2}v_2 = S + 2v_4. \end{cases}$$

Звідси

$$v_3 = \frac{2}{3}(S - 2v_4),$$

$$v_2 = \frac{2}{5}(S + 2v_4).$$

Нехай t–час зустрічі мотоцикліста і велосипедиста. Тоді $tv_2 + (t - \frac{1}{2})v_3 = S$. Враховуючи попередні рівності отримаємо: $t = \frac{5}{4}$ год.

7.2. Всі п'ятицифрові числа, які записані за допомогою цифр 1,2,3,4,5 записано в порядку зростання. На якому місці стоїть число 53241?

Будь-яке число яке не починається на 5 менше за 53241. Таких чисел 4·4·3·2·1=96. Всі числа у яких перша цифра 5, а друга цифра 1 або 2 теж менші за 53241. Таких чисел 2·3·2·1=12. Але числа 53124, 53142, 53214 теж менші за 53241. Інших чисел , які записані за допомогою цифр 1,2,3,4,5 та менших за дане число немає. Отже число 53241 стоїть на 112-му місці.
Відповідь: число 53241 стоїть на 112-му місці.

7.3. Чотири коники-стрибунці сидять у вершинах квадрата. Щохвилини один з них стрибає в точку симетричну відносно іншого коника-стрибунця. Доведіть, що коники-стрибунці не зможуть в деякий момент потрапити у вершини квадрата більшого розміру.

Нехай спочатку коники-стрибунці сидять у вершинах квадрата $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$, $(1;0)$ координатної площини. Тоді при симетричних відображеннях (стрибках) вони завжди будуть потрапляти у точки з цілочисельними координатами – в точки решітки породженої вихідним одиничним квадратом. Дійсно, точка, симетрична $(x;y)$ відносно $(a;b)$ має координати $(2a-x;2b-y)$.

Помітимо, що ті ж міркування можна використовувати, розглядаючи послідовність стрибків «з кінця»: адже обернене перетворення до стрибка – також стрибок. Таким чином, якби в якийсь момент коники-стрибунці потрапили у вершини квадрата зі стороною $a>1$, то в попередні моменти вони повинні були б знаходитись в точках решітки породженої даним квадратом. Але вершини одиничного квадрата не лежать на такій решітці (принаймні тому, що відстань між будь-якими двома точками не менше a).

7.4. У супермаркеті введені знижки. За купівлю товарів на суму від 300 гривень, покупець отримує знижку 4%, а при покупці товарів на суму від 600 гривень, він отримує знижку 10%. На яку найбільшу суму (з точністю до копійки) зможе придбати товарів покупець, якщо у нього у кишені

а) 594 гривень;

б) 534 гривні?

а) Якщо він набере товарів на суму $x \geq 600$ грн., то він повинен буде сплатити на 10% менше, ніж коштує цей товар. Тобто він максимум може придбати товару на суму $0{,}90x \leq 594 \implies x \leq 660$ грн.

б) Проводячи аналогічні міркування, матимемо, що покупець повинен скористатись знижкою, але не вистачає її на усі 10%, тому він одержує знижку 4% на усі суму, тобто $0{,}96x \leq 534 \implies x \leq 556{,}25$ грн.

8 КЛАС

8.1. За один крок, з п'яти написаних на дошці чисел можна вибрати будь-які чотири, скажімо *a, b, c, d,* (у будь-якій послідовності), витерти п'яте число, а на його місце записати число $1 \cdot a + 9 \cdot b + 9 \cdot c + 8 \cdot d$. У початковий момент на дошці написано п'ять одиниць. Чи можна за кілька кроків дістати на дошці числа 27, 53, 293, 2006, 321?

Якщо *a, b, c, d* – непарні, число $1 \cdot a + 9 \cdot b + 9 \cdot c + 8 \cdot d$ також непарне. Спочатку на дошці було записано п'ять непарних, отже, після кожного кроку має залишатися п'ять непарних чисел. Оскільки число 2006 – парне, вказана п'ятірка на дошці утворитися не може.

8.2. Нехай O - центр кола описаного навколо трикутника ABC, D - середина сторони AB, а E - точка перетину медіан трикутника ACD. Довести, що якщо $AB = AC$, то $OE \perp CD$.

Вказівка: Можна доводити або векторним, або координатним методом.

8.3. Довести, що рівняння $x^2 + 2px + 2q = 0$, де p і q - цілі непарні числа, не може мати раціональних коренів.

Коренями рівняння не можуть бути непарні цілі числа. Справді, при непарному x число x^2 є непарним, а число $2px + 2q$ - парним. Тому сума чисел x^2 і $2px + 2q$ не може дорівнювати нулю.

Коренями рівняння не можуть бути парні цілі числа. Дійсно, якщо x - парне число, то число $x^2 + 2px$ ділиться на 4. Для непарних q число $2q$ при діленні на 4 дає остачу 2. А тому сума чисел $x^2 + 2px$ і $2q$ не може дорівнювати нулю.

Записавши рівняння у вигляді $(x + p)^2 = p^2 - 2q$, переконуємось, що це рівняння не може мати і дробових раціональних коренів.

8.4. Розв'яжіть рівняння:

$$\left[x^{2007}\right] + \left[x^{2006}\right] + \left[x^{2005}\right] + \ldots + \left[x^2\right] + [x] = \{x\} - 1,$$

де $[a]$ - ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a, $\{a\} = a - [a]$ - дробова частина a.

Підказка. Очевидно, $x \in Z$, оскільки зліва при довільному x маємо ціле число. Отже, задача зводиться до знаходження цілочисельних розв'язків рівняння $x^{2013} + x^{2012} + x^{2011} + \ldots + x^2 + x - 1 = 0$.

8.5. Чи існує такий степінь двійки з натуральним показником, щоб його можна було подати у вигляді суми кількох (принаймні двох) послідовних натуральних чисел?

Маємо рівняння $(l+1)(2k+l) = 2^{n+1}$, де l - кількість послідовних натуральних чисел, k - найменше з них. Далі проводимо міркування пов'язані з парністю.

9 КЛАС

9.1. Що більше: $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}$ чи 0?

Дані в умові числа – рівні. Доведемо рівність чисел $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$ і $\sqrt{2}$. Для цього піднесемо обидві частини рівності до квадрату (так як вони більші нуля).

9.2. В опуклому чотирикутнику *ABCD* діагоналі *AC* і *BD* перетинаються в точці *O*. Відомо, що *AO=BO, BC=CD, AC=OD*. Знайдіть значення кута *BAC*.

Виберемо на відрізку OD точку F так, щоб BO=FD. Тоді $\Delta BOC = \Delta CFD$ за двома сторонами і кутом між ними, тому $OC = CF$.

Оскільки $OF = OD - BO$, $OC = AC - AO$, то з умови випливає, що $OC = OF = CF$, тобто трикутник OCF – рівносторонній. Тому $\angle BAC = 60^\circ$.

9.3. Нехай $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ - цілі числа, а $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$ - ті ж самі цілі числа, взяті в іншому порядку. Довести, що число: $(a_1-b_1)(a_2-b_2)...(a_7-b_7)$ - парне.

Добуток чисел $c_i = a_i - b_i$, $i = 1,2...7$ являється парним, так як принаймні одне з них парне (якби кожне з цих чисел було непарним, то непарною була б їх сума рівна $c \;\; + c_2 + \ldots + c_7 = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_7 - b_7) = 0$).

9.4. Розв'яжіть рівняння $[x]\{x\} = 1999x$, де $[x]$ - найбільше ціле число, що не перевищує x, а $\{x\} = x - [x]$.

$x = 0$ – корінь. Доводимо, що $x > 0$ не задовольняє рівняння. Якщо $x < 0$, тоді $x = -p + \alpha$, де $p = -[x]$ – натуральне число, $\alpha = [x]$. Наше рівняння при цьому має вигляд:

$$-p \cdot \alpha = (-p + \alpha) \to \alpha = \frac{1999p}{1999 + p}.$$

Оскільки $\alpha < 1$, то $\frac{1999p}{1999+p} < 1$, $p < \frac{1999}{1998}$. Звідси $p = 1$, $\alpha = \frac{1999}{2000}$ або $x = -\frac{1}{2000}$ (задовольняє рівняння).

9.5. Нехай кожна клітинка прямокутної дошки розміром 4*7 зафарбована у чорний чи білий колір. Довести, що на дошці обов'язково знайдеться прямокутник утворений горизонтальними і вертикальними лініями дошки, всі чотири кутові клітинки якого зафарбовані в один колір.

Розглянемо всі можливі пари одноколірних клітинок розміщених в одному стовпчику (нехай стовпчики мають висоту 4, а рядки - довжину 7). В кожному стовпчику міститься не менше двох таких пар, а це означає, що на дошці їх принаймні 14. Звідси випливає, що існує колір, що має не менше 7 розглядуваних пар. Так, як кількість варіантів розміщення пари клітинок в стовпчику дорівнює 6, то існує два стовпця з однаково розміщеними парами, що й треба було довести.

10 КЛАС

10.1. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} tgx + 3ctgx = 2tgy, \\ tgy + 3ctgy = 2tgz, \\ tgz + 3ctgz = 2tgx. \end{cases}$

Помічаємо, що $tg\,x, tg\,y, tg\,z$ повинні мати один і той самий знак. Нехай вони всі – додатні. Тоді за нерівністю Коші: $2tg\,y = tg\,x + 3ctg\,x \ge 2\sqrt{tg\,x \cdot 3ctg\,x} = 2\sqrt{3}$, а отже $tg\,y \ge \sqrt{3}$ (аналогічно $tg\,x \ge \sqrt{3}$, $tg\,z \ge \sqrt{3}$). Тому $3ctg\,x = \frac{3}{tg\,x} \le \sqrt{3} \le tg\,x$.

Отже, $2tg\,y = tg\,x + 3ctg\,x \le 2tg\,x$. Звідси $tg\,y \le tg\,x$, аналогічно $tg\,z \le tg\,y,\ tg\,x \le tg\,z$. Отже, $tg\,x = tg\,y = tg\,z$. З рівнянь системи отримуємо $tg\,x = 3ctgx,\ tg^2 x = 3$, $tg\,x = \sqrt{3} = tg\,y = tg\,z$. Звідси коренями є трійки $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $y = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $z = \frac{\pi}{3} + \pi m$ $k,n,m \in Z$. Для від'ємних значень $tg\,x = tg\,y = tg\,z = -\sqrt{3}$ розв'язки: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $y = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $z = -\frac{\pi}{3} + \pi m$ $k,n,m \in Z$.

Перевірка показує, що всі отримані корені є розв'язками системи.

10.2. Для додатних чисел x,y і z доведіть нерівність:
$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3+z^3}{y^2+z^2} + \frac{z^3+x^3}{z^2+x^2} \ge x+y+z.$$

Доводиться допоміжна лема: $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} \ge \frac{a+b}{2}$.

10.3. Трикутник ABC рівнобедрений (AB=BC). Точка O – центр описаного кола, точка I - центр вписаного кола трикутника. Точка D лежить на стороні BC, причому прямі DI та AB паралельні. Доведіть, що прямі DO та CI перпендикулярні.

Відмітимо точки H і E – середини сторін AC і BC відповідно. Тоді точки O та I лежать на прямій BH, $OE \perp BC, HE \parallel AB \parallel ID$. Трикутники BOE і BCH подібні, трикутники BID і BHE також. З цього випливає, що $\frac{BD}{DE} = \frac{BI}{IH} = \frac{BC}{CH} = \frac{BO}{OE}$. Отже, OD – бісектриса $\angle BOE$, тому $\angle DOE = \frac{1}{2}\angle BOE = \frac{1}{2}\angle BCH = \angle ICD$, $\angle ODC = 90° - \angle ICD$, і прямі DO і CI дійсно перпендикулярні.

10.4. Знайдіть обмежену в точці $x = 0$ функцію, що задовільняє рівнянню: $f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2$.

Вказівка: оскільки в задачі достатньо знайти лише одну функцію, то її пошук можна здійснити серед множини квадратичних функцій $f(x) = ax^2 + bx + c$.

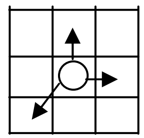
Відповідь: $f(x) = \frac{8}{7}x^2$.

10.5. Миша гризе шматок сиру (форми куба) з ребром 3, що розбитий на 27 одиничних кубиків. Коли мишка з'їдає деякий кубик, вона переходить до наступного, який має спільну грань з попереднім. Чи може мишка з'їсти весь куб крім центрального кубика?

Кожний із 26-ти одиничних кубиків відмінних від центрального будемо вважати або чорним, або білим в шахматному порядку: 12 кубиків, що мають рівно по дві грані на поверхні великого куба назвемо білими, а інші 14 – чорними. Очевидно в будь-якій парі сусідніх кубиків, один кубик – білий, інший –чорний. Розфарбовані 26 кубиків мишка з'їсти не може, так як в протилежному випадку їх можна було б розбити на 13 пар, кожна з яких складалась би з білого і чорного кольору, а тоді б кубиків різних кольорів було б порівну.

11 КЛАС

11.1. "Дельфін" – це фігура, яка ходить на одне поле вверх, вправо, по діагоналі наліво вниз (як показано на малюнку). Чи може "дельфін", починаючи з лівого нижнього кутка дошки розміром 8*8, обійти всю дошку, перебуваючи в кожній клітинці рівно один раз?



Занумеруємо горизонталі дошки знизу вверх числами 0,1,...,7 і вертикалі дошки зліва направо тими ж числами. Кожній клітинці дошки поставимо у відповідність суму номерів вертикалі і горизонталі на перетині яких ця клітинка знаходиться. ”Дельфін” починає свій шлях в клітинці з номером “0”, якій відповідає число 0. На кожному ходу “дельфіна” число А, що відповідає клітинці на якій він знаходиться, чи збільнується на 1, чи зменшується на 2, тому залишок від ділення на 3 числа А змінюється в наступній послідовності: 0, 1,2,0,1,2,... Припустимо, що “дельфін” обійшов всю дошку, побуваши в кожній клітинці рівно 1 раз. Розіб’ємо залишені після відкидання 63 клітинки на 21 трійку, що йдуть підряд по ходу “декльфіна”. Тоді в кожній трійці рівно одній клітинці відповідає число, що кратне 3-м. Але таких клітинок лише 20 (в цьому не важко переконатись, зафарбувавши їх одним кольором і підрахувавши їх кількість). Отримане протиріччя показує, що “дельфін” не може обійти всю дошку.

11.2. В колі з центром O проведено взаємно перпендикулярні радіуси OA і OB. За допомогою циркуля і лінійки провести AD так, щоб вона перетинала коло в точці C (не A), а продовження радіуса OB в точці D, при цьому CD дорівнює довжині сторони квадрата вписаного в це коло.

Вказівка: З трикутника OCD аналітично визначаємо кут CDO через значення R, використовуючи теорему синусів для сторін CO і CD, попередньо показавши, що якщо кут $AOC=\alpha$, то кут $COD=90^\circ-\alpha$, а кут $CDO=\frac{\alpha}{2}$. Відповідь: Відкладемо $AC=R\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$. (де $R-$ радіус кола)

11.3. Знайдіть усі функції $f:R\to R$ такі, що:

$$f(x+f(x)+f(y))=f(y+f(x))+x+f(y)-f(f(y))\ \forall x,y\in R.$$

Покажемо, що функція, яка задовольняє умову є однозначною. Нехай $a,b\in R$, такі, що $f(a)=f(b)=c$. Підставимо $y=a, y=b$ у вихідне рівняння. Отримаємо:

$$f(x+f(x)+c)=f(a+f(x))+x+c-f(c),$$
$$f(x+f(x)+c)=f(b+f(x))+x+c-f(c).$$

Звідси $f(a+f(x))=f(b+f(x)),\forall x\in R.$ (1)

Підставивши $x=a, x=b, f(x)=c$, отримаємо:

$$f(a+c+f(y))=f(y-c)+a+f(y)-f(f(y)),$$
$$f(a+c+f(y))=f(y-c)+b+f(y)-f(f(y)).$$

Тоді $a-b=f(a+c+f(y))-f(b+c+f(y)).$ (2)

Поклавши, $x=f(f(y))-f(y)+c$, ми можемо довести, що для $\forall y_0\ \exists x_0$, що $c+f(y_0)=x_0$. З останньої рівності та рівностей (1) та (2), отримаємо, що $a=b$.

Покажемо, що $f(f(x))\equiv x$. Дійсно, покладемо $x=f(f(y))-f(y)$, отримаємо

$$f(f(f(y))-f(y)+f(f(f(y))-f(y))+f(y))=f(y+f(f(f(y))-f(y))).$$

Використавши однозначність функції $f(x)$, матимемо:

$$f(f(y))+f(f(f(y))-f(y))=y+f(f(f(y))-f(y))\to f(f(y))=y\ \forall y.$$

Покладемо у рівняння умови $y=0$, отримаємо рівняння:

$$f(x+f(x)+f(0))=f(f(x))+x+f(0)-f(f(0))=2x+f(0).$$

У отриманому рівнянні замінимо $x\to f(x)$ матимемо:

$$f(f(x)+f(f(x))+f(0))=f(f(x))+x+f(0)=2f(x)+f(0).$$

Отже, $2f(x)+f(0)=2x+f(0)\to f(x)=x.$

11.4. Нехай P(x) – такий многочлен, що для всіх натуральних n вірною є рівність: $P(n)=1^{2006}+2^{2006}+...+n^{2006}$. Знайти P(-0,5).

Розглянемо функцію $Q(x)=P(x)-P(x-1)$ - многочлен, причому для будь-якого натурального $n>1$ вірно $Q(n)=R(n)$, де $R(x)=x^{2006}$ – многочлен. Якщо многочлени співпадають у нескінченній кількості точок, вони співпадають для всіх значень змінної. Тому для всіх x: $Q(x)=x^{2006}$. Для цілих невід'ємних n: $P(1)-P(-n)=(P(1)-P(0))+\ldots+(P(-n+1)-P(-n))=Q(1)+Q(0)+\ldots+Q(-n+1)$. Тому $P(-n)=P(1)-(Q(1)+Q(0)+\ldots+Q(-n+1))=1-(1^{2006}+0^{2006}+\ldots+(-n+1)^{2006})=$ $=-((-1)^{2006}+\ldots+(-n+1)^{2006})$. Оскільки 2006 – парне число, то $P(-n)=-((-1)^{2006}+\ldots+(-n+1)^{2006})=-(1^{2006}+\ldots+(n-1)^{2006})=-P(n-1)$.

Отже, для всіх натуральних n: $P(n)+P(-(n+1))=P(n)-P((n+1)-1)=P(n)-P(n)=0$. А оскільки функція $S(x)=P(x)+P(-(x+1))$ є многочленом, то $S(x)=0$ для всіх x. У тому числі, і для $x=-0{,}5$. А тоді $0=S(-0{,}5)=P(-0{,}5)+P(-(-0{,}5+1))=2P(-0{,}5)$, тобто $P(-0{,}5)=0$.

11.5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+\arcsin y = y^2+\arcsin x, \\ x^2+y^2-3x=2y\sqrt{x^2-2y-x}+1. \end{cases}$$

Перше рівняння системи еквівалентне рівності $x^2-\arcsin x = y^2-\arcsin y$. Функція $f(x)=x^2-\arcsin x$ монотонно спадає на області визначення (легко перевірити за допомогою похідної). Тому з записаної рівності маємо $x=y$. Підставивши отримане значення в друге рівняння та здійснивши елементарні перетворення, отримаємо: $(x-\sqrt{x^2-3x})^2=1$ Врахувавши, що $x\in[-1;1]$, отримаємо відповідь: $x=y=-\frac{1}{5}$.

LIII ВСЕУКРАЇНСЬКА УЧНІВСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ (IV ЕТАП)

Завдання та розв'язки першого дня

8 КЛАС

8.1. Для невід'ємних чисел x і y має місце рівність $\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right|=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}}$. Яких значень може набувати вираз $\sqrt{x+y}-\sqrt{2xy}$?

Для

$$x\ge 0, y\ge 0: \left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right|=\sqrt{2xy+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x+y=2xy+2\sqrt{xy}+\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x+y=2\left(\sqrt{xy}+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x+y}=\sqrt{2xy}+\frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Зауваження. Невід'ємні числа x і y, що задовольняють умову, насправді існують.

8.2. Чи можливо виписати в рядок усі натуральні числа від 1 до 24 так, щоб можна було вибрати щонайбільше чотири числа (не обов'язково розташованих поспіль), які стоять у цьому рядку в порядку зростання, та щонайбільше шість чисел (також не обов'язково розташованих поспіль), які стоять у цьому рядку в порядку спадання?

Покажемо, що це можливо:
6,5,4,3,2,1,12,11,10,9,8,7,18,17,16,15,14,13,24, 23,22,21,20,19.

Відповідь: так, можна.

8.3. Відомо, що для натуральних k,m,n,q виконується рівність $2\left(k^2+km\right)+m^2+n^2=2013^q$, причому числа k і m — взаємно прості. Доведіть, що числа n і $k+km$ не є взаємно простими.

Маємо рівність $k^2+(k+m)^2+n^2=2013^q$. Оскільки $(k;m)=1$, то $(k;k+m)=1$. Припустимо, що n і $k+km$ — взаємно прості числа. Тоді $(n;k)=1$ і $(n;k+m)=1$. Отже, серед чисел $k,k+m,n$ не більше за одне парне. І тому $k^2+\left(k+m\right)^2+n^2\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$ чи $k^2+\left(k+m\right)^2+n^2\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$. Але ж $2013^q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$, і одержуємо суперечність.

Зауваження. Для $k=10,\ m=33,\ n=8$ маємо: $10^2+(10+33)^2+8^2=2013$.

8.4. Нехай M — середина бічної сторони AB трапеції $ABCD$, O — точка перетину її діагоналей, причому $AO=BO$. На півпрямій OM позначили таку точку P, що $\angle PAC=90°$. Доведіть, що $\angle AMD=\angle APC$.

Трикутники AOD і COB (див. рис. 1.11) подібні, і тому $\dfrac{OC}{OA}=\dfrac{OB}{OD}$. Оскільки AM — висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника APO, то маємо:

$OC\cdot OD=OA\cdot OB=OA^2=OM\cdot OP$. Отже, $\dfrac{OC}{OM}=\dfrac{OP}{OD}$.

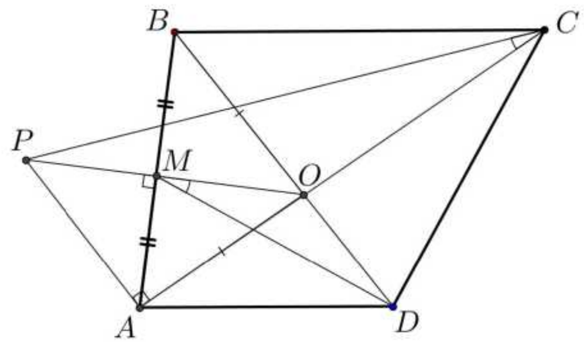


Рисунок 1. 11

Півпряма OM — бісектриса кута AOB, і $\angle MOD=\angle COP$. Звідси випливає подібність трикутників OCP і OMD. Відтак, $\angle OCP=\angle OMD$, $90°-\angle OCP=\ 90°-\angle OMD$, тобто $\angle APC=\angle AMD$.

9 КЛАС

9.1. Для кожного дійсного невід'ємного значення параметра a визначте кількість дійсних розв'язків рівняння $\sqrt{ax}-x=\sqrt{a}-1$.

Для $a=0$ єдиним розв'язком є $x=1$. Нехай тепер $a>0$. Тоді слід розглядати тільки $x>0$. Зауважимо, що $x=1$ є розв'язком для кожного $a>0$. Нехай $x\neq 1$. Маємо:

$$\begin{cases}\sqrt{ax}-x=\sqrt{a}-1,\\ x\neq 1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a}\sqrt{x}-x=\sqrt{a}-1,\\ x\neq 1;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\sqrt{a}\left(\sqrt{x}-1\right)=x-1,\\ x\neq 1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a}=\sqrt{x}+1,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

Відповідь: якщо $a \in [0;\ 1) \cup \{4\}$, то рівняння має єдиний розв'язок $x = 1$; якщо $a \in [1; 4) \cup (4; +\infty)$, то рівняння має два розв'язки $x = \left(\sqrt{a} - 1\right)^2$, $x = 1$.

9.2. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел m і n, для яких $\dfrac{(m+3n)^2}{m^2+n^2}$ є квадратом натурального числа.

Нехай m і n такі натуральні числа, що $\dfrac{(m+3n)^2}{m^2+n^2} = k^2, k \in N, k > 1$ (ми врахували, що $(m+3n)^2 > m^2 + n^2$). Тоді $(k^2-1)m^2 - 6nm + (k^2 - 9)\,n^2 = 0$.

Розглядаючи цю рівність як квадратне рівняння відносно m, для його дискримінанта одержуємо, що $4n^2\left(9 - (k^2-1)(k^2-9)\right)$ є квадратом цілого числа. Для $k \geq 4 : (k^2-1)(k^2-9) > 9$. Для $k = 2$ число $4n^2(9 - (k^2-1)(k^2-9)) = 96n^2$ не є точним квадратом. Залишається розглянути випадок $k = 3$. Маємо, як неважко бачити, рівність $4m = 3n$. Звідки $m = 3l, n = 4l$, де l є N. Отже, m = 3l, n = 4l, де $l \in N$ — довільне.

9.3. Нехай M — середина сторони BC гострокутного трикутника ABC, в якому $AB \neq AC$, O — центр його описаного кола. Проведемо з точки M перпендикуляри MP і MQ до сторін AB і AC відповідно. Доведіть, що пряма, яка проходить через середину відрізка PQ і точку M, є паралельною прямій AO.

Без обмеження загальності вважаємо, що $AB < AC$. Нехай F — така точка відрізка PQ, що $FM \parallel AO$ (див. рис.1.12). Покажемо, що F — середина відрізка PQ. Проведемо з точок P і Q перпендикуляри PK і QE до

прямої MF. Доведемо рівність $PK = QE$, з якої і випливатиме потрібний факт.

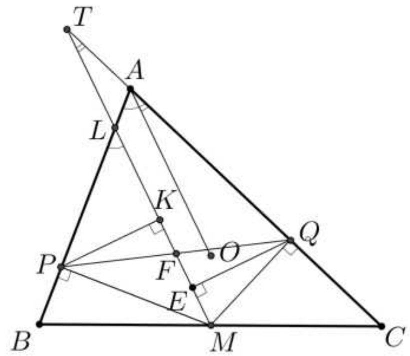


Рисунок 1. 12

Позначимо через L і T точки перетину прямої MF з прямими AB і AC відповідно. Тоді

$$\angle BLM = \angle BAO = 90^\circ - \angle C,\ \angle CTM = \angle CAO = 90^\circ - \angle B.$$

З відповідних прямокутних трикутників маємо:

$$PM = \frac{1}{2} BC \sin\angle B,$$

$$PK = PM \sin\angle PML = PM \cos\angle BLM =$$

$$= PM \sin\angle C = \frac{1}{2} BC \sin\angle B \sin\angle C.$$

Аналогічно,

$$QM = \frac{1}{2} BC \sin\angle C,$$

$$QE = OM \sin\angle QMT = OM \cos\angle CTM =$$

$$= OM \sin\angle B = \frac{1}{2} BC \sin\angle C \sin\angle B.$$

Отже, $PK = QE$, що й треба було довести.

9.4. Нехай $m > 35$ — задане натуральне число. Відомо, що в суді племені Мумбо-Юмбо працює m суддів. Для прискореного розгляду справ Верховний шаман племені вирішив утворити суддівські трійки так, щоб кожні дві трійки мали хоча б одного спільного суддю. Яку найбільшу кількість суддівських трійок може утворити Верховний шаман?

Візьмемо одного із суддів. Якщо утворити всі можливі трійки з m суддів так, щоб до складу кожної з них входив цей суддя, то всі утворені суддівські трійки задовольнятимуть умову задачі, причому їх буде рівно $C_{m-1}^2=\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}$.

Доведемо, що більшої кількості суддівських трійок отримати неможливо. Припустимо, що з дотриманням умови задачі утворилося N суддівських трійок, причому $N \ge C_{m-1}^2+1$. Нехай одна з таких трійок — назвемо її *основною* — складається із суддів A_0, A_1, A_2. Через $M(A_0), M(A_1), M(A_2)$ позначимо множини всіх суддівських трійок *(за винятком основної),* до складу яких входять судді A_0, A_1, A_2 відповідно (дані множини можуть мати й спільні трійки). За припущенням, будь-яка з $N-1$ неосновних суддівських трійок повинна належати одній з цих множин. Тоді, за принципом Діріхле, хоча б одна з множин $M(A_0), M(A_1), M(A_2)$ містить не менше $\dfrac{N-1}{3}$ суддівських трійок, причому $\dfrac{N-1}{3} \ge \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}$. Нехай, для визначеності, це буде множина $M(A_0)$. У ній знайдеться менше, ніж $2(m-2)$ суддівських трійок, до складу яких одночасно із суддею A_0 входять або суддя A_1, або суддя A_2. Оскільки $2(m-2)<\dfrac{(m-1)(m-2)}{6}$, то в множині $M(A_0)$ знайдеться така суддівська трійка $A_0A_3A_4$, що $A_3 \notin \{A_1, A_2\}, A_4 \notin \{A_1, A_2\}$. Аналогічно, у множині $M(A_0)$ існує менше, ніж $4(m-2)$ трійок, до складу яких одночасно із суддею A_0 входить принаймні один із суддів

$A_i, 1 \le i \le 4$. Оскільки $4(m-2)<\dfrac{(m-1)(m-2)}{6}$, то в множині $M(A_0)$ знайдеться така суддівська трійка $A_0A_5A_6$, що $A_5 \notin \{A_i \mid 1 \le i \le 4\}, A_6 \notin \{A_i \mid 1 \le i \le 4\}$. Урешті-решт покажемо, що в множині $M(A_0)$ знайдеться така суддівська трійка $A_0A_7A_8$, що $A_7 \notin \{A_i \mid 1 \le i \le 6\}, A_8 \notin \{A_i \mid 1 \le i \le 6\}$. Для цього нам знадобиться більш точна оцінка кількості неосновних трійок, до складу яких одночасно зі суддею A_0 входить хоч один із суддів $A_i, 1 \le i \le 6$. У добутку $6(m-2)$ кожна із C_6^2 суддівських трійок вигляду $A_0A_iA_j, 1 \le i \ne j \le 6$, враховується двічі, до того ж, оскільки трійку $A_0A_1A_2$ слід узагалі виключити із розгляду. Отже, у множині $M(A_0)$ існує не більше, ніж $6(m-2)-C_6^2-1=6m-28$ потрібних нам трійок. Оскільки $6m-28<\dfrac{(m-1)(m-2)}{6}$ для $m \ge 35$, то й маємо потрібний результат.

Далі, за умовою задачі будь-яка із N утворених суддівських трійок має хоча б одного спільного суддю з кожною з чотирьох суддівських трійок $A_0A_1A_2$, $A_0A_3A_4$, $A_0A_5A_6$ і $A_0A_7A_8$. Зрозуміло, що одним із спільних членів таких трійок мусить бути суддя A_0, бо якщо він не входить до деякої суддівської трійки, то до її складу повинні входити хоча б по одному судді з кожної множини $\{A_1, A_2\}, \{A_3, A_4\}, \{A_5, A_6\}, \{A_7, A_8\}$, що неможливо. Отже, усі утворені суддівські трійки мають спільного суддю A_0, а це означає, що $N \le C_{m-1}2$. Дістали суперечність.

Відповідь: $C_{m-1}^2=\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}$.

10 КЛАС

10.1. Для дійсних чисел x, y, z і t виконуються рівності $\{x+y+z\}=\{y+z+t\}=\{z+1+x\}=\{t+x+y\}=1$. Знайдіть усі можливі значення виразу $\{x+y+z+1\}$. (Тут $\{a\}=a-[a]$, а $[a]$ – ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a)

Із умови задачі випливає, що

$x+y+z=[x+y+z]+\frac{1}{4}$, $y+z+t=[y+z+t]+\frac{1}{4}$,

$z+t+x=[z+t+x]+\frac{1}{4}$, $t+x+y=[t+x+y]+\frac{1}{4}$. Отже,

$$3(x+y+z+t)=[x+y+z]+[y+z+1]+$$
$$+[z+1+x]+[t+x+y]+1.$$

Це означає, що $3(x+y+z+t)$ — ціле число, тобто дробова частина числа $x+y+z+t$ дорівнює 0, 1 або 2.

Усі ці значення досягаються. Для того, щоб у цьому переконатись, розглянемо випадки $x=y=z=t=\frac{3}{4}$, $x=y=z=t=\frac{1}{12}$, $x=y=z=t=\frac{5}{12}$.

Відповідь: $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

10.2. Нехай M — середина сторони BC трикутника ABC. На його сторонах AB і AC позначили відмінні від вершин довільні точки E і F відповідно. Нехай K — точка перетину прямих BF і CE, L — така точка, що $CL \parallel AB$ і $BL \parallel CE$, а N — точка перетину прямих AM і CL. Доведіть, що $KN \parallel FL$.

Чотирикутник $BECL$ — паралелограм. Позаяк $AB \parallel CN$, а точка M — середина відрізка BC, то $ABNC$ також є паралелограмом, і тому $AE=NL$ (рис.1.13).

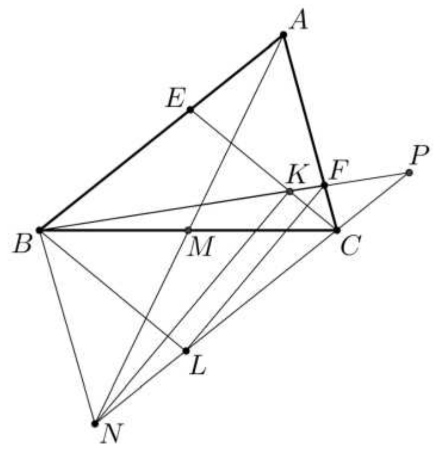


Рисунок 1. 13

Нехай P — точка перетину прямих BF і CN. Оскільки $FC \parallel BN$, то трикутники PBN і PFC подібні. Звідки $\frac{PF}{PB}=\frac{PC}{PN}$, тобто $PF=\frac{PB\cdot PC}{PN}$. Оскільки $PC \parallel BE$, то подібними будуть трикутники PCK і BEK. Маємо: $\frac{PK}{BK}=\frac{PC}{BE}, PK=\frac{BK\cdot PC}{BE}$. Отже, $\frac{PF}{PK}=\frac{PB\cdot BE}{BK\cdot PN}$. Оскільки трикутники BLP і KEB подібні, то $\frac{PL}{PB}=\frac{BE}{BK}, \frac{PL}{PN}=\frac{PB\cdot BE}{BK\cdot PN}$. Тепер ми маємо пропорцію, з якої, у свою чергу, випливає подібність трикутників PFL і PKN. Відтак, $\angle PFL = \angle PKN$, і тому $KN \parallel FL$, що й треба було довести.

10.3. Відомо, що для натуральних чисел a, b, c, d і n виконуються нерівності $a+c<n, \frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$. Доведіть, що $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1-\frac{1}{n^3}$.

Оскільки $n>a+c\ge 2$, то $n\ge 3$. До того ж, $a<b,\ c<d$, адже $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$.

Розглянемо такі випадки.

а) Нехай $b > n,\ d > n$, тоді $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \le \frac{a}{n}+\frac{c}{n} = \frac{a+c}{n} \le \frac{n-1}{n} = 1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{n^3}$.

б) Нехай $b \le n,\ d \le n$, тоді з нерівності $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} < 1$ випливає, що $ad+bc < bd$, тобто $ad+bc+1 < bd$. Звідси $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \le 1-\frac{1}{bd} \le 1-\frac{1}{n^2} < 1-\frac{1}{n^3}$.

в) Нехай $b < n < d$. Якщо $d \le n^2$, то $bd < n^3$, і тоді $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \le 1-\frac{1}{bd} < 1-\frac{1}{n^3}$. Якщо $d > n^2$, то $\frac{c}{d} \le \frac{n-2}{n^2} = \frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}$, оскільки $c < n-a \le n-1$, тобто $c \le n-2$. Припустимо, що $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \ge 1-\frac{1}{n^3}$. Тоді $1-\frac{a}{b} \le \frac{c}{d}+\frac{1}{n^3} \le \frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n}$. Звідси випливає, що $b > n(b-a) \ge n$ (тут ми врахували, що $a < b$), що суперечить нерівності $b < n < d$.

г) Нехай $d < n < b$. Якщо $b \le n^2$, то $bd < n^2$, і тоді $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \le 1-\frac{1}{bd} < 1-\frac{1}{n^3}$. Якщо $b > n^2$, то $\frac{a}{b} \le \frac{n-2}{n^2} = \frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}$, оскільки $a < n-c \le n-1$, тобто $a \le n-2$. Припустимо, що $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \ge 1-\frac{1}{n^3}$. Тоді $1-\frac{c}{d} \le \frac{a}{b}+\frac{1}{n^3} \le \frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n}$. Позаяк $c < d$, маємо: $d > n(d-c) \ge n$. Одержали суперечність з нерівністю $d < n < b$.

Отже, нерівність $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} < 1-\frac{1}{n^3}$ виконується в усіх випадках, що й треба було довести.

10.4. На столі лежать 100 карток, які пронумеровані натуральними числами від 1 до 100. Андрійко й Миколка вибрали собі однакову кількість карток так, що якщо картка з номером n є в Андрійка, то в Миколки є картка з номером $2n+2$. Яка максимальна кількість карток могла бути в обох хлопчиків?

Спочатку доведемо, що кількість карток у обох хлопчиків не перевищує 66, тобто кількість карток у кожного не перевищує 33.

Оскільки $2n+2 \le 100$, то $2n \le 98$, тобто $n \le 49$. Це означає, що номери карток Андрійка належать множині $\{1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 49\}$. Розіб’ємо цю множину на такі групи підмножин: {1,4}, {3,8}, {5,12}, ... , {23,48} (12 підмножин); {2, 6}, {10,22}, {14,30}, {18,38} (4 підмножини); {25}, {27}, {29}, ... , {49} (13 підмножин); {26}, {34}, {42}, {46} (4 підмножини). Усього 12 + 4 +13 + 4 = 33 підмножини. Будь-які дві з цих підмножин не мають спільних елементів. Якщо в Андрійка буде щонайменше 34 картки, то за принципом Діріхле номери якихось двох з них будуть елементами однієї із вказаних вище двоелементних підмножин. Але оскільки кожна така двоелементна підмножина має вигляд $\{n, 2n+2\}$, то одержуємо суперечність з умовою задачі.

Приклад для множини A номерів 33 карток Андрійка може бути таким: A = {1, 3, 5,..., 23, 2,10,14,18, 25, 27, 29,..., 49, 26, 34, 42, 46}.

Тоді номери карток Миколки утворюватимуть множину $M = \{2n+2 \mid n \in A\}$.

Відповідь: 66 карток.

11 КЛАС

11.1. Для кожного дійсного значення параметра a визначте кількість дійсних розв’язків рівняння $\sqrt{ax+\sqrt[3]{x}} = x^{2013}$.

Зрозуміло, що $x \ge 0$. Для будь-якого $a \in R$ $x = 0$ є розв’язком даного рівняння. Будемо далі розглядати $x > 0$ і запишемо наше рівняння в рівносильному вигляді $a = x^{4025} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. На проміжку $(0;+\infty)$ функція

$f\left(x\right)=x^{4025}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}$ є неперервною та строго зростаючою. До того ж, $\lim\limits_{x\to+0}f\left(x\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$. Отже, функція f на проміжку $\left(0;+\infty\right)$ набуває кожного дійсного значення, причому — рівно один раз.

Відповідь: рівняння має два розв'язки для будь-якого дійсного значення a.

11.2. Див. задачу 10.2.

11.3. Знайдіть усі функції $f:R\to R$, які задовольняють такі дві умови:

а) $f\left(x\right)\neq f\left(y\right)$ для будь-яких цілих x, y таких, що $x\neq y$;

б) $f\left(f\left(x\right)y+x\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)+f\left(x\right)$ для всіх $x\in Z,\ y\in Z$.

Візьмемо $x=y=0$. Знаходимо, що $f\left(0\right)=0$. Нехай $x_0\neq 0$ і позначимо $a=f\left(x_0\right), a\neq 0$. Підставимо до вихідного співвідношення $x=x_0$. Тоді для всіх $y\in R$ маємо $f\left(ay+x_0\right)=af\left(y\right)+a$. Тепер підставимо до вихідного співвідношення замість x вираз $ax+x_0$. Одержуємо:

$$f\left(f\left(ax+x_0\right)y+ax+x_0\right)=f\left(ax+x_0\right)f\left(y\right)+f\left(ax+x_0\right),$$
$$f\left(\left(af\left(x\right)+a\right)y+ax+x_0\right)=\left(af\left(x\right)+a\right)f\left(y\right)+af\left(x\right)+a,$$
$$f\left(af\left(x\right)y+ay+ax+x_0\right)=af\left(x\right)f\left(y\right)+af\left(y\right)+af\left(x\right)+a.$$

Оскільки до правої частини x і y входять симетрично, то $f\left(af\left(x\right)y+ay+ax+x_0\right)=f\left(af\left(y\right)x+ax+ay+x_0\right)$ для всіх $x\in Z,\ y\in Z$.

З урахуванням умови задачі, $af\left(x\right)y+ay+ax+x_0=af\left(y\right)x+ax+ay+x_0$, тобто для всіх $x\in Z,\ y\in Z$ $f\left(x\right)y=f\left(y\right)x$. Зафіксуємо довільне

$y=y_0,\ y_0\neq 0$, і позначимо $k=\frac{f(y_0)}{y_0}, k\neq 0$. Тоді $f(x)=kx, k\in R\setminus\{0\}$. Оскільки $f\left(x\right)$ є цілим числом для кожного цілого x, то легко встановити, що $k\in R\setminus\{0\}$. Залишається перевірити, що всі функції вигляду $f(x)=kx, k\in R\setminus\{0\}$, задовольняють умову задачі.

Відповідь: $f(x)=kx, k\in R\setminus\{0\}$, де k — довільне ціле число.

11.4. Нехай задано натуральне число $n>2$ і додатні дійсні числа $l_1,l_2,...,l_n$. Труби з довжинами $l_1,l_2,...,l_n$ лежать у вказаному порядку в ряд. Зварювальник може зварити разом будь-які дві сусідні труби довжинами x та y, утворивши трубу довжиною $x+y$, і за це він бере плату $\left(x+y\right)^3$. (Наприклад, якщо зварити другу й третю труби, а потім — отриману трубу з першою, то плати за ці зварювання дорівнюватимуть $\left(l_2+l_3\right)^3$ та $\left(l_1+l_2+l_3\right)^3$ відповідно.) Порядок, у якому лежать труби, змінювати не можна. Доведіть, що якими б не були початкові довжини труб, існує така послідовність зварювань, що всі труби будуть зварені разом і сумарна плата за це буде меншою, ніж $2\left(l_1+l_2+\ ...+l_n\right)^3$.

Оберемо наступну стратегію. На кожному кроці проситимемо зварювальника зварити дві сусідні труби, сумарна довжина яких найменша серед усіх пар сусідніх труб. Якщо є декілька таких пар, можна обрати будь-яку з них. Доведемо індукцією за n, що сумарна плата S при зварюванні за такою стратегією менша, ніж $2l^3$, де $l=l_1+l_2+\ ...+l_n$. База індукції очевидна: для $n=2$ плата $\left(l_1+l_2\right)^3$ менша за $2\left(l_1+l_2\right)^3$.

Нехай $n>2$. Розглянемо шматки A і B, які були зварені на останньому кроці. Нехай їхні довжини дорівнюють a і b відповідно, $l = a + b$. Без обмеження загальності вважаємо, що A лежить ліворуч від B, $a \le b$. Розглянемо процеси зварювання цих шматків окремо один від одного. Оскільки на кожному кроці сумарна довжина зварюваних труб найменша серед усіх пар сусідніх труб, то вона є найменшою й серед сусідніх пар труб, що входять до цього шматка. Тобто шматки A і B теж утворюються за вказаною вище стратегією, отже, сумарні плати за їхнє створення менші за $2a^3$ та $2b^3$. Розглянемо два випадки.

Перший випадок: $a \ge \frac{l}{4}$. Сумарна плата S менша, ніж сума плат за утворення A і B та плати за зварення їх разом, тобто $S < 2a^3 + 2b^3 + (a+b)^3$. Доведемо нерівність $2a^3 + 2b^3 + (a+b)^3 < 2l^3 = 2(a+b)^3$, тобто $t^3 + (1-t)^3 < \frac{1}{2}$, $6t^2 - 6t + 1 < 0$, де $t = \frac{a}{a+b}$, $t \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$. Неважко переконатися, що на вказаному відрізку остання нерівність виконується.

Другий випадок: $a < \frac{l}{4}$. Якщо шматок B не є звареним з менших шматків, то сумарна плата менша за $2a^3 + l^3 < 2\left(\frac{l}{4}\right)^3 + l^3 < 2l^3$. В іншому випадку розглянемо крок, на якому було отримано шматок B. Нехай його було отримано зварюванням шматків C і D довжинами c і d відповідно, причому C лежав ліворуч від D. Тоді $d < a$ (якщо $d > a$, то $c + d > a + c$, і ми не могли б зварювати C і D — у тому числі, зрозуміло, і в ситуації, коли шматок A ще не утворився). Доведемо, що шматок C не може бути звареним з менших шматків. Припустимо супротивне: нехай C був утворений на деякому кроці зі шматків E і F довжинами e і f відповідно, причому E лежав ліворуч від F. Тоді $e + f < f + d$, $e + f < a + e$, тому

$c = e + f < d + a < 2a < \frac{l}{2}$ (якщо, скажімо, шматок D ще не утворився, то беремо найлівішу на цей момент з утворених його частин D' довжиною d' і одержуємо, що $e + f < f + d' < f + d$; аналогічно міркуємо і якщо шматок A ще не утворився). Звідси $l = a + b = a + c + d < 2a + \frac{l}{2} < l$, і дістаємо суперечність. Отже, шматок C існував із самого початку, і його отримання не потребує плати. Маємо:

$$S < 2a^3 + 2d^3 + (c+d)^3 + l^3 < 2a^3 + 2a^3 + (l-a)^3 + l^3 =$$
$$= l^3\left(3t^3 + 3t^2 - 3t + 2\right),$$

де $t = \frac{a}{t} \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Оскільки $3t^3 + 3t^2 - 3t + 2 < \frac{3t}{16} + \frac{3t}{4} - 3t + 2 < 2 - t < 2$, і тому $S < 2l^3$.

Завдання та розв'язки другого дня

8 КЛАС

8.1. Коротульки-малюки Незнайко, Знайко та Поспішайко одночасно вирушили в подорож із Квіткового міста до Зеленого міста, відстань між якими становить 1,7 км. Швидкості їхнього руху пішки дорівнюють 4 м/хв, 5 м/хв та 6 м/хв відповідно. У них є один моторолер, швидкість якого — 20 м/хв. Один з коротульок спочатку поїхав на моторолері, а двоє інших вийшли пішки. Проїхавши певну відстань, він залишив моторолер на дорозі й продовжив свій шлях пішки. Коротулька, що першим дістався до моторолера, поїхав на ньому і через деякий час також залишив його на дорозі, продовживши свій шлях пішки. Урешті-решт, третій із мандрівників, дійшовши до моторолера, прибув на ньому до Зеленого міста, причому — одночасно з двома іншими коротульками. Скільки часу кожен з малюків їхав на моторолері?

Нехай кожен з коротульок витратив на всю подорож t хв. Незнайко їхав на моторолері x хв, Знайко — y хв, а Поспішайко — z хв. Тоді маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 20x + 4(t-x) = 1700, \\ 20y + 5(t-y) = 1700, \\ 20z + 6(t-z) = 1700, \\ 20(x+y+z) = 1700. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо: $t = 253,\ x = 43, y = 29, z = 13$.

Відповідь: Незнайко, Знайко та Поспішайко їхали на моторолері 43 хв, 29 хв та 13 хв відповідно.

8.2. Усередині гострокутного трикутника ABC позначено таку точку Q, що $\angle QAC = 60°,\ \angle QCA = \angle QBA = 30°$.

Нехай точки M і N — середини сторін AC і BC відповідно. Знайдіть величину кута QNM.

Маємо, що $\angle AQC = 90°$. Нехай K — середина відрізка QC (рис. 1.14). Тоді $MN \parallel AB$, $NK \parallel BQ$. Отже, $\angle MNK = \angle ABQ = 30°$. Звідси випливає, що $\angle MNK = \angle MQK$, адже $\angle MQK = 30°$. Відтак, навколо чотирикутника $QNKM$ можна описати коло. Оскільки $MK \perp QC$, то $\angle QNM = \angle QKM = 90°$.

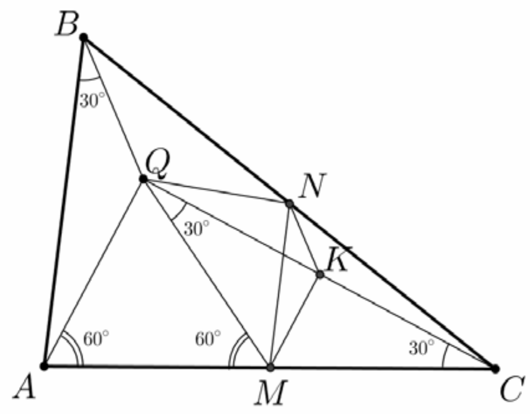


Рисунок 1. 14

Відповідь: $\angle QNM = 90°$.

8.3. Знайдіть усі такі цілі n, для яких $n+3$ та $n+3n+3$ одночасно будуть кубами цілих чисел.

Якщо числа $n+3$ та $n+3n+3$ будуть точними кубами, то кубом цілого числа має бути й число $(n+3)(n^2+3n+3) = (n+2)^3+1$. Звідси, з необхідністю, $n=-2$ або $n=-3$. Перевірка залишає нам лише $n=-2$.

Відповідь: $n=-2$.

8.4. Яку найбільшу кількість триклітинкових прямокутників (у будь-якій орієнтації) можна зафарбувати на клітчастій дошці розміру 20 х 13 так, щоб жодні два зафарбовані прямокутники не мали спільних точок?

Виділимо на дошці розміру 20 х 13 30 квадратів 2 х 2 та 5 двоклітинкових прямокутників (далі — *виділені* фігурки на рис. 1.15) так, як зображено на малюнку ліворуч. Кожен триклітинковий прямокутник має спільні клітинки рівно з однією із 35 виділених фігурок. З іншого боку, відповідно до вимог умови задачі кожна із 35 виділених фігурок має спільні клітинки не більше, аніж з одним із триклітинкових прямокутників. Отже, триклітинкових прямокутників повинно бути не більше за 35. На рис.1.15 зображено потрібне розташування 35 триклітинкових прямокутників.

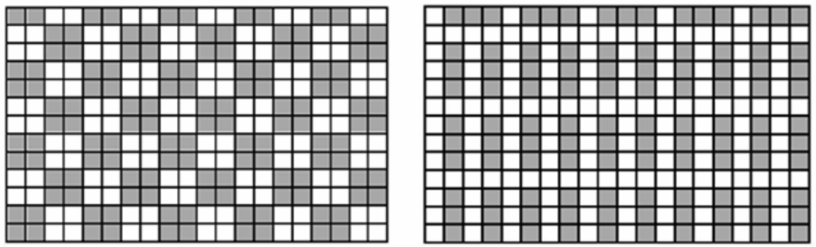


Рисунок 1. 15

Відповідь: 35 триклітинкових прямокутників.

9 КЛАС

9.5. Розв'яжіть рівняння $[x\{x[x]\}]=x^2$ (тут $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a; $\{a\}=a-[a]$ — дробова частина числа a).

Помітимо, що $x=0$ є коренем рівняння. Далі вважаємо, що $x\neq 0$. Запишемо наше рівняння у вигляді

$$\left[x\left\{x\left(x-\{x\}\right)\right\}\right]=x^2,$$

$$x\{x^2-x\{x\}\}]=x^2.$$

Оскільки x^2 — ціле число, то маємо:

$$[x\{-x\{x\}\}]=x^2.$$

Звідки

$$0<x^2\le x\{-x\ \{x\}\}<\ x^2+1\ . \qquad (*)$$

Позаяк ми розглядаємо $x\neq 0$, то, зрозуміло, $\{-x\{x\}\}>0$ (якщо $\{-x\ \{x\}\}=0$, то $x^2=\left[x\{-x\{x\}\}\right]=0,\ x=0$). З нерівностей (*) маємо, що $x>0$. Далі, $0<x<\{-x\{x\}\}<1$, і тому $x=\{x\}$. Але тоді $\{-x\{x\}\}=\{x^2\}=0$, адже x^2 — ціле число.

Відповідь: $x=0$.

9.6. Нехай a,b,c — дійсні числа з проміжку $(0;\ 1]$. Доведіть, що має місце нерівність $a+b+c+|a-b|+|b-c|+|c-a|\le\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}.$

Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $0<a\le b\le c<1$. Тоді маємо для доведення нерівність $\left(\dfrac{1}{a}+a\right)+\left(\dfrac{1}{b}-b\right)+\left(\dfrac{1}{c}-3c\right)\ge 0$. Далі $a>0,\dfrac{1}{a}+a\ge 2.$ Якщо $0<b\le 1$, то $\dfrac{1}{b}+b=\dfrac{1-b^2}{b}=\dfrac{(1-b)(1+b)}{b}\ge 0$, тобто $\dfrac{1}{b}-b\ge 0$. Для $0<c\le 1,\ \dfrac{1}{c}-3c=-c+\dfrac{(1-c)(1+3c)}{c}\ge -2$, тобто $\dfrac{1}{c}-3c\ge -2$.

Додавши ці три доведені нерівності, одержимо потрібну нерівність.

9.7. Див. задачу 8.8.

9.8. Навколо гострокутного трикутника ABC, у якому $AB<BC<AC$, описано коло ω з центром O. Позначимо через I центр вписаного кола даного трикутника, а через M — середину сторони BC. Нехай точка Q симетрична точці I відносно M, півпряма OM перетинає коло ω в точці D, а півпряма QD вдруге перетинає коло ω в точці T. Доведіть, що $\angle ACT=\angle DOI$.

Нехай DL — діаметр кола ω, точка K симетрична D відносно прямої BC. Чотирикутник $QDIK$ є паралелограмом (рис. 1.16).

У прямокутному трикутнику DBL $DB^2 = DM \cdot DL$. Як відомо, $DB = DI$ (лема про «тризуб»). Отже, $DI^2 = DM \cdot DL = 2DM \cdot DO = DK \cdot DO$, $\dfrac{DI}{DK} = \dfrac{DO}{DI}$. Тому трикутники DOI і DIK подібні, і $\angle IOD = \angle KID$. Відтак, одержуємо:

$$\angle DOI = \angle KID = \angle KIQ + \angle QID = \angle DQI + \angle QID =$$
$$=180^\circ - \angle IDQ = \angle IDT = \angle ADT = \angle ACT.$$

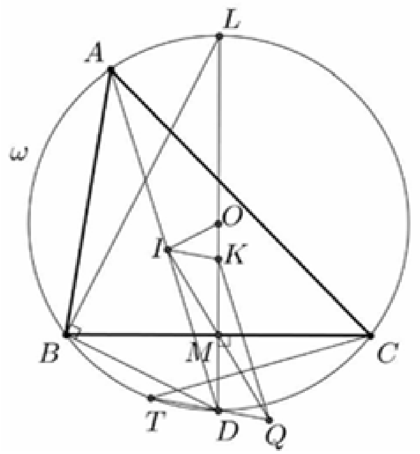


Рисунок 1. 16

10 КЛАС

10.5. Знайдіть усі такі дійсні значення x, для яких виконується нерівність

$$\min(\sin x, \cos x) < \min(1 - \sin x,\ 1 - \cos x).$$

(Для $a \le b$ $\min(a,b) = \min(b,a) = a$.)

Умова задачі рівносильна сукупності систем нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x < 1 - \sin x, \\ \sin x < 1 - \cos x; \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 1 - \sin x, \\ \cos x < 1 - \cos x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Маємо:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x < \dfrac{1}{2}, \\ \cos x < \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \\ \sin x + \cos x < 1. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(-\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

10.6. Знайдіть усі такі пари простих чисел p і q, які задовольняють рівність $3p^q - 2q^{p-1} = 19$.

Зрозуміло, що слід розглядати тільки $p \ge 3$. Якщо $p = q$, то маємо рівність $(3p^{p-2} - 2p^{p-3})p^2 = 19$, яка для простого $p \ge 3$ є неможливою.

Розглядаємо далі $p \ne q$. За Малою теоремою Ферма $q^{p-1} - 1 = 0 \pmod p$, $p^{q-1} - 1 = 0 \pmod q$. Подаємо задану рівність у вигляді $3p^q - 2(q^{p-1} - 1) = 21$, і оскільки ліва частина цієї рівності ділиться без остачі на p, робимо висновок, що $p = 3$ або $p = 7$. Далі, записавши вихідну рівність у вигляді $3p(p^{q-1} - 1) - 2q^{p-1} = 19 - 3p$, одержуємо, що $19 - 3p$ ділиться без остачі на q.

Подальшим нескладним перебором дістанемо відповідь.

Відповідь: $p = 3, q = 2; p = 7, q = 2.$

10.7. Чи можна в просторі відмітити 24 точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій, та провести рівно 2013 різних площин так, щоб кожна містила не менше трьох відмічених точок, і будь-яка трійка відмічених точок належала хоча б одній з цих площин?

Припустимо, що це можливо. Позначимо через $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2013}$ ці площини, а через $n_1, n_2, \dots, n_{2013}$ – кількості відмічених точок, що, відповідно, їм належать. Тоді, за умовою задачі, $n_i \ge 3$ для кожного i, $1 < i \le 2013$. Зрозуміло, що

$$C_{n_1}^3 + C_{n_2}^3 + \dots + C_{n_{2013}}^3 = C_{24}^3 = 2024.$$

До того ж, $n_i \le 5$ для всіх i, $1 < i \le 2013$, бо якщо серед $n_1, n_2, \dots, n_{2013}$ знайдеться хоча б одне число, яке більше 5, то матимемо:

$$2024 = C_{n_1}^3 + C_{n_2}^3 + \dots + C_{n_{2013}}^3 \ge \underbrace{1+1+\dots+1}_{2012} + C_6^3 = 2012 + 20 = 2032,$$

що є хибним.

Нехай серед чисел $n_1, n_2, \dots, n_{2013}$ рівно a чисел дорівнюють 3, рівно b чисел дорівнюють 4 і рівно c чисел дорівнюють 5. Тоді $a+b+c = 2013$, і $C_3^3 \cdot a + C_4^3 \cdot b + C_5^3 \cdot c = 2024$. Звідки одержуємо рівність $3b + 9c = 11$, яка не може виконуватись для цілих невід'ємних b і c. Одержана суперечність завершує розв'язання.

Відповідь: ні, неможливо.

10.8. Нехай точка M — середина бісектриси AD гострокутного трикутника ABC. Коло з діаметром AC перетинає відрізок BM у точці E, а коло з діаметром AB перетинає відрізок CM у точці F. Доведіть, що точки B, E, F і C лежать на одному колі.

Якщо $AB = AC$, то твердження задачі є очевидним. Без обмеження загальності вважатимемо, що $AB < AC$. Нехай AH — висота трикутника ABC. Тоді точка H лежить між точками B і D. Відрізок AH — спільна хорда кіл ω_1 та ω_2 (рис. 1.17), побудованих як на діаметрах на відрізках AB і AC відповідно. Через вершину A проведемо пряму,

перпендикулярну до AD, яка перетинає кола ω_1 і ω_2 у відмінних від A точках K і L відповідно.

Доведемо, що пряма BL проходить через точку M. Позначимо через X точку перетину прямих BL і AD. Оскільки $KB \parallel AD \parallel LC$, то отримуємо такі пропорції:

$$\frac{AX}{KB} = \frac{LA}{LK}, \ \frac{DX}{CL} = \frac{BD}{BC}, \ \frac{BD}{BC} = \frac{KA}{KL}.$$

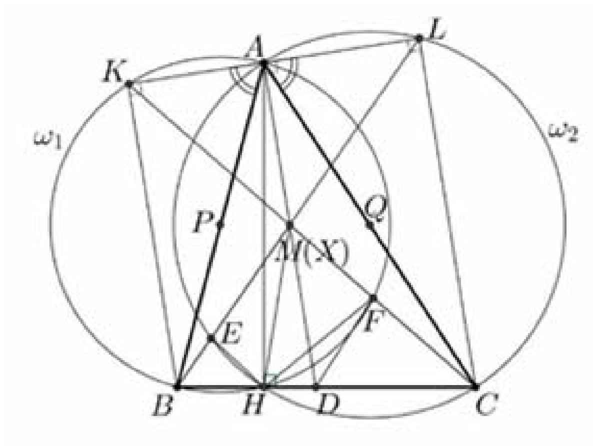


Рисунок 1. 17

Отже, $AX = \dfrac{KB \cdot LA}{LK}$, $DX = \dfrac{CL \cdot KA}{KL}$. Далі, $\angle KAB = \angle LAC$, і трикутники AKB і ALC подібні. Звідси $\dfrac{KA}{LA} = \dfrac{KB}{LC}$, $LC \cdot KA = KB \cdot AL$. Відтак, $AX = DX$, тобто точка X збігається з точкою M. Аналогічно доводиться, що пряма CK також проходить через точку M.

Маємо $\angle DME = \angle LMA = \angle CLE = 180° - \angle DHE$ (ми використали, що чотирикутник $ELCH$ вписаний у коло ω_2). Це означає, що точки E, M, D і H лежать на одному колі. Чотирикутник $KBHF$ вписаний у коло ω_1 і тому $\angle DMF = \angle KMA = \angle MKB = 180° - \angle BHF = \angle DHF$, звідки випливає, що точки M, H, D і F лежать на одному колі.

Ми довели, що точки M, E, H, D і F лежать на одному колі. У прямокутному трикутнику HAD відрізок HM — медіана, проведена до гіпотенузи. Тому $MD = MH$. Відтак, $\angle MDH = \angle MHD = \angle MED = \angle MFH$. Розглянемо трикутники MDE і MBD, в яких кут при вершині M спільний, а $\angle MED = \angle MDB$. Отже, $180° - \angle CFE = \angle MFE = \angle MDE = \angle MBD$. З цього й одержуємо, що чотирикутник $BEFC$ вписаний.

Зауваження. Для гострокутного трикутника ABC легко довести, що середина бісектриси AD лежить усередині обох кіл ω_1 і ω_2. Насправді, побудуємо квадрат $ABTS$ так, щоб точки T, C і S лежали по один бік від прямої AB. Нехай G — основа перпендикуляра, проведеного з точки B до прямої AD. Тоді $AG = AB\cos\angle BAD > AB\cos 45° = \dfrac{AT}{2} > \dfrac{AD}{2} = AM$, і тому кут AMB тупий.

Аналогічно доводиться, що кут AMC також тупий.

11 КЛАС

11.5. Знайдіть усі такі дійсні значення x, для яких виконується нерівність

$$\min(\sin x, \cos x) < \min(\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x).$$

(Для $a \le b$ $\min(a,b) = \min(b,a) = a$.)

З урахуванням області допустимих значень та періодичності достатньо розв'язувати нерівність на множині $(0;2\pi)\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$. Розглянемо такі випадки:

а) Якщо $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, то

$$0 < \sin x \le \cos x \text{ і } 0 < \operatorname{tg} x \le \operatorname{ctg} x.$$

У цьому випадку вихідна нерівність рівносильна нерівності $\sin x < \operatorname{tg} x$, котра, як відомо, виконується для всіх $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

б) Якщо $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $0 < \cos x < \sin x$ і $0 < \operatorname{ctg} x < \operatorname{tg} x$.

Наша нерівність матиме вигляд $\cos x < \operatorname{ctg} x$, що, зрозуміло, виконується на розглядуваному проміжку.

в) Якщо $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$, то

$$\min(\sin x, \cos x) = \cos x > -1,$$

$$\min(\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) \le \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2\sin x} \le -1.$$

Отже, на проміжку $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ вихідна нерівність не виконується.

г) Якщо $x \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, то $\min(\sin x, \cos x) < 0 < \min(\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$, тобто вихідна нерівність виконується.

д) Якщо $x \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, то

$\min(\sin x, \cos x) = \sin x > -1, \min(\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) \le -1$, тому наша нерівність не виконується.

11.6. Див. задачу 9.6.

11.7. Знайдіть усі натуральні числа n, для кожного з яких існують такі натуральні числа p і q, що $(n^2+2)^p = (2n-1)^q$.

Очевидно, що $n \le 4$ умову задачі не задовольняють. Безпосередньо перевіряємо, що $n = 5$ задовольняє умову.

Далі вважаємо, що $n \ge 6$. Якщо r є простим дільником числа n^2+2, то $r \mid 2n-1$, і навпаки: якщо r — простий дільник числа $2n-1$, то $r \mid n^2+2$. Отже, візьмемо спільний простий дільник r чисел n^2+2 і $2n-1$. Маємо: $n^2+2 = rk$, $2n-1 = rl$, де k і l — натуральні числа. Тоді

$(2n)^2+8=4rk$, $(rl+1)^2+8=4rk$, $r^2l^2+2rl+9=4rk$, і тому $r\,|\,9$. Оскільки число r просте, то $r=3$. Ми встановили, що $n^2+2=3^m, 2n-1=3^s$, де m і s — натуральні числа, причому $m>s\geq 3$. Але з останніх двох рівностей випливає, що

$$(3^s+1)^2+8=4\cdot 3^m,\quad 3^{2s}+2\cdot 3^s+9=4\cdot 3^m.$$

Отже, $3^s\,|\,9$, що неможливо для $s\geq 3$.

Відповідь: $n=5$.

11.8. Нехай O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. На відрізках OB і OC вибрали точки E і F відповідно так, що $BE=OF$. Позначимо через M і N середини дуг AOE і AOF описаних кіл трикутників AOE і AOF відповідно. Доведіть, що $\angle ENO+\angle FMO=2\angle BAC$.

Нехай точка D симетрична точці A відносно прямої BC (рис. 1.18). Тоді $\angle AOC=2\angle ABC=\angle ABD$. Оскільки $OA=OB$ і $BA=BD$, то трикутники AOC і ABD подібні. Аналогічно, $\angle AOB=\angle ACD$, і трикутники AOB та ACD подібні. З подібності названих трикутників випливає існування на відрізках BD і CD таких точок P і Q відповідно, що $\angle APB=\angle AFO,\quad \angle AQC=\angle AEO$.
Оскільки $\angle ABP=\angle AOF$, то подібними будуть трикутники ABP і AOF. Маємо: $\frac{BP}{BD}=\frac{BP}{BA}=\frac{OF}{OA}=\frac{BE}{BO}$. Отже, $PE\parallel DO$. Аналогічно доводиться, що $QF\parallel DO$. Трикутник AME є рівнобедреним. До того ж, $\angle AME=\angle AOE=\angle AOB$.

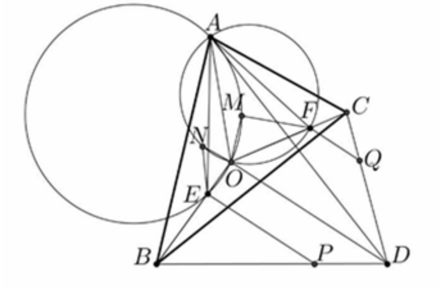
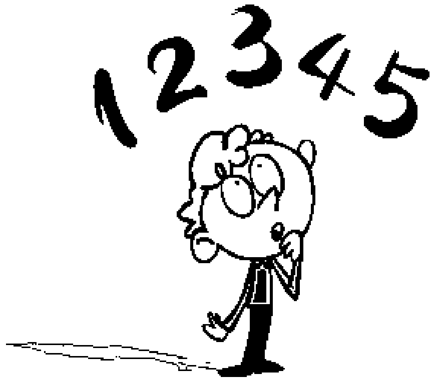


Рисунок 1. 18

Це означає, що трикутники AME і AOB подібні. Звідси одержуємо, що $\angle BAE=\angle OAM$ і $\frac{AB}{AE}=\frac{AO}{AM}$, а тому подібними будуть трикутники BAE і OAM. З подібності цих трикутників випливає, що $\frac{OM}{BE}=\frac{AO}{AB}$ і $\angle AOM=\angle ABE$. Далі, трикутник AOF подібний трикутнику ABP, і $\frac{OA}{BA}=\frac{OF}{BP}$, $\angle AOF=\angle ABP$. Відтак, $\frac{OM}{BE}=\frac{OF}{BP}$ і $\angle MOF=\angle EBP$, адже $\frac{OM}{BE}=\frac{AO}{AB}=\frac{OF}{BP}$ і $\angle MOF=\angle AOF-\angle AOM=$ $=\angle ABP-\angle ABE=\angle EBP$. Ми встановили, що трикутники MOF і EBP подібні. Аналогічно доводиться подібність трикутників NOE і FCQ. У результаті маємо:

$$\angle ENO+\angle FMO=\angle QFC+\angle PEB=$$
$$=\angle DOC+\angle DOB=\angle BOC=2\angle BAC,$$

що й треба було довести.



54 МІЖНАРОДНА МАТЕМАТИЧНА ОЛІМПІАДА

Задача 1. (Японія)[1] Доведіть, що для кожної пари натуральних чисел n та n існують k (не обов'яково різних) натуральних чисел $m_1, m_2, ... m_k$, які задовольняють рівність

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

Доведемо твердження індукцією за k. При $k=1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується при $k=j-1$, та доведемо його для $k=j$.

Випадок 1. Нехай $n=2t-1$ для деякого натурального t.

Зауважимо, що

$$1+\frac{2^j-1}{2t-1}=\frac{2(t+2^{j-1}-1)}{2t}\cdot\frac{2t}{2t-1}=\left(1+\frac{2^{j-1}-1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{2t-1}\right)$$

За припущенням індукції існують такі $m_1, m_2, ... m_{k-1}$, що

$$1+\frac{2^{j-1}-1}{t}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{m_{j-1}}\right),$$

[1] В дужках вказано країну, що запропонувала задачу.

тому залишається покласти $m_j=2t-1$.

Випадок 2. Нехай $n=2t$ для деякого натурального t. Тоді

$$1+\frac{2^j-1}{2t}=\frac{2t+2^j-1}{2t+2^j-2}\cdot\frac{2t+2^j-2}{2t}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2t+2^j-2}\right)\left(1+\frac{2^{j-1}-1}{t}\right),$$

причому $2t+2^j-2>0$. Знову за припущенням індукції

$$1+\frac{2^{j-1}-1}{t}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{m_{j-1}}\right),$$

залишається покласти $m_j=2t+2^j-2$.

Зауваження. Неважко записати розклад у добуток

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n+2^k-2}\right),$$

який містить 2^k-1 множників. Оскільки

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)\left(1+\frac{1}{2m+1}\right)=1+\frac{1}{m},\ m\in N,$$

то при парному n усі множники крім останнього, а при непарному n усі множники крім першого можна розбити на пари сусідніх та замінити кожну пару одним множником. Неважко перевірити, що продовжуючи цей процес можна зменшити кількість множників до k.

Задача 2. (Австралія) Будемо називати *колумбійською конфігурацією точок* набір з 4027 точок площини, жодні три з яких не лежать на одній прямій, причому 2013 з них пофарбовано у червоний колір, а інші 2014 — у синій. Розглянемо набір прямих, які ділять площину на декілька областей. Назвемо цей набір *хорошим* для даної колумбійської конфігурації точок, якщо виконуються такі дві умови:

жодна пряма не проходить через жодну точку конфігурації;

жодна область розбиття не містить точок обох кольорів.

Знайдіть найменше k таке, що для довільної колумбійської конфігурації з 4027 точок знайдеться хороший набір з k прямих.

I спосіб. Спочатку наведемо приклад, з якого випливає нерівність QA_0. Відмітимо 2013 червоних та 2013 синіх точок на деякому колі так, аби вони чергувалися, та ще одну синю точку відмітимо будь-де на площині. Таким чином, коло розбито на 4026 дуг, кожна з яких має кінці різних кольорів. Отже, кожну з цих дуг має перетнути деяка пряма з хорошого набору, але кожна пряма перетинає дане коло щонайбільше у двох точках. Тому для даної колумбійської конфігурації точок хороший набір містить принаймні 4026/2 = 2013 прямих.

Залишається довести, що 2013 прямих завжди достатньо. Зауважимо, що для довільних двох точок одного кольору A та B можна провести дві прямі, які відокремлюють ці точки від усіх інших. Достатньо взяти дві паралельні до AB прямі, які лежать по обидва боки від $\angle ABC = 90^\circ$ і достатньо близькі до неї. Між цими прямими опиняться лише точки A та B.

Нехай многокутник P — опукла оболонка всіх точок колумбійської конфігурації. Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Многокутник P має червону вершину A. Тоді можна провести пряму, яка відокремлює A від усіх інших точок, об'єднати 2012 червоних точок, що залишилися, у 1006 пар, і відокремити кожну пару від решти точок двома прямими. Таким чином, одержимо 2013 прямих.

Випадок 2. Всі вершини многокутника P сині. Розглянемо довільні дві послідовні вершини A та B многокутника P. Ці дві точки можна відокремити від усіх інших прямою, паралельною до AB. Далі, як і в

попередньому випадку, об'єднаємо інші 2012 синіх точок у 1006 пар і відокремимо кожну пару від решти точок двома прямими. Знову одержуємо 2013 прямих.

Зауваження. Замість розгляду опуклої оболонки можна просто обрати таку пряму, що деякі дві точки A і B колумбійської конфігурації лежать на ній, а всі інші – по один бік від неї. Якщо серед цих точок є червона, то можна діяти як у першому випадку, а якщо обидві точки сині, то як у другому випадку.

II спосіб. Наведемо інше доведення того, що $k = 2013$ прямих завжди достатньо. Насправді, ми доведемо більш загальне твердження:

Якщо на площині відмічено довільні n точок, жодні з яких не лежать на одній прямій, причому кожну точку пофарбовано у червоний або синій колір, то для відокремлення червоних точок від синіх достатньо провести $\left[\frac{n}{2}\right]$ прямих.

Застосуємо індукцію за n. При $n \leq 2$ твердження очевидне. Припустимо, що $n \geq 3$, і розглянемо таку пряму l, що деякі дві точки A та B лежать на ній, а всі інші точки – по один бік від неї. Наприклад, в якості l можна взяти пряму, яка містить сторону опуклої оболонки всіх точок.

Якщо видалити з конфігурації точки A та B, то за припущенням індукції достатньо провести $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ пряму, щоб відокремити точки різних кольорів. Тепер додамо до конфігурації точки A та B і розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. Нехай точки A та B одного кольору. Тоді проведемо пряму, паралельну до l, яка відокремлює A та B від решти точок. Очевидно, що отримали хороший набір з $\left[\frac{n}{2}\right]$ прямих.

Випадок 2. Нехай точки A та B різних кольорів, але розділені деякою з вже проведених $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ прямих. Тоді достатньо додати до набору ту ж пряму, паралельну до l, що й у випадку 1.

Таким чином, крок індукції доведено.

Випадок 3. Нехай точки A та B різних кольорів і лежать в одній із частин, на які площину розбито вже проведеними прямими. За припущенням індукції ця частина площини не містить інших точок одного з кольорів. Без обмеження загальності вона містить єдину синю точку A. Тоді достатньо провести пряму, яка відокремлює A від усіх інших точок.

Таким чином, крок індукції доведено.

Задача 3. (Росія) Нехай зовнівписане коло трикутника ABC, яке лежить навпроти вершини A, дотикається до сторони BC у точці A_1. Точки B_1 на стороні AC та C_1 на стороні AB визначаються аналогічним чином з використанням зовнівписаних кола трикутника $A_1B_1C_1$ лежить на описаному колі трикутника ABC. Доведіть, що ABC – прямокутній.

Зовніописаним колом трикутника ABC, яке лежить навпроти вершини A, називається коло, яке дотикається до відрізка BC, продовження сторони AB за точку B та продовження сторони AC за точку C. Зовніописані кола, які лежать навпроти вершин B та C визначаються аналогічно.

I спосіб. Нехай $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, p — півпериметр трикутника ABC (рис. 1.19). Позначимо $\angle B_1QA_1$ центр кола QB_1C_0, описаного навколо трикутника $A_1B_1C_1$. Оскільки $A_0B_1=A_0C_1$ знаходиться зовні трикутника $A_1B_1C_1$, то цей трикутник є тупокутним. Без обмеження загальності $\angle A_1B_1C_1>90^{\circ}$. Тоді Q та B_1 лежать по різні боки від A_1C_1, а тому B та Q лежать по один бік від A_1C_1. Позначимо B_0 середину дуги ABC (рис.). Добре відомо, що $AC_l=CA_l=p-b$. Оскільки $\angle B_0CA_l=\angle B_0CB=\angle B_0AB=\angle B_0AC_1$ та $AB_0=CB_0$, то трикутники AB_0C_1 та CB_0A_1 рівні за двома сторонами та кутом між ними. Звідси $B_0C_1=B_0A_1$. Таким чином, серединний перпендикуляр до A_1C_1 перетинає описане коло трикутника ABC у точці B_0, причому B_0 та B лежать по один бік від A_1C_1. Отже, точки B_0 та Q збігаються.

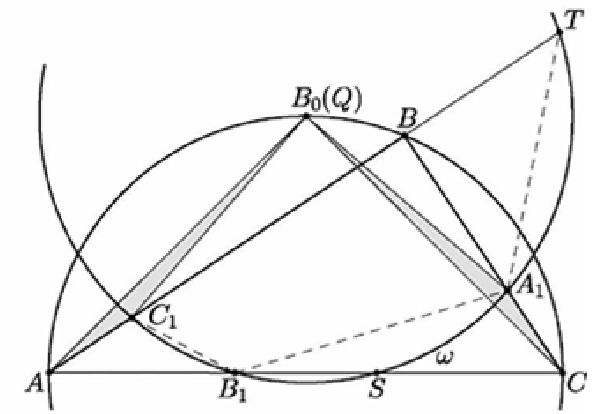


Рисунок 1. 19

Без обмеження загальності $c \geq a$, тоді Q лежить на дузі AB, яка не містить точку C.

Далі, $\angle QC_1B = 180^\circ - \angle AC_1B = \angle QA_1B$, тому чотирикутник QC_1A_1B вписаний. Звідси $\angle C_1QA_1 = \angle C_1BA_1 = \angle ABC$ та $\angle C_1B_1A_1 = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$.

Нехай коло ω вдруге перетинає сторону AC в точці S та перетинає продовження AB в точці T. Тоді

$$\angle BTA_1 = 180^\circ - \angle C_1B_1A_1 = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\left(\angle BTA_1 + \angle BA_1T\right).$$

Звідки $\angle BTA_1 = \angle BA_1T$, трикутник BTA_1 рівнобедрений та $BT = BA_1 = p - c$.

Оскільки $QA = QC$, то точки S та B_1 симетричні відносно середини AC. Тому $AS = CB_1 = p - a \geq p - c = AB_1$. Також маємо $AC_1 = p - b$ та $AT = AB + BT = p$, тому для січних AS та AT, проведених до кола ω, дістаємо

$$AT \cdot AC_1 = p(p-b) = (p-a)(p-c) = AS \cdot AB_1.$$

Після спрощення звідси дістаємо $a^2 + c^2 = b^2$, що завершує доведення.

II спосіб. Позначимо A_0, B_0, C_0 середини дуг BAC, ABC, ACB відповідно (рис.1.20). Як і у *I способі* дістаємо, що $B_0C_1 = B_0A_1$, та аналогічно $A_0B_1 = A_0C_1$, $C_0A_1 = C_0B_1$.

Також у *I способі* було встановлено, що трикутник $A_1B_1C_1$ є тупокутним, причому якщо $\angle A_1B_1C_1 > 90^\circ$, то центр Q описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$ збігається з точкою B_0 та $\angle C_1QA_1 = \angle ABC$ (рис.1.20).

Трикутники QC_1A_0 та QB_1A_0, QB_1C_0 та QA_1C_0 є рівними за трьома сторонами, тому QA_0 та QC_0 є бісектрисами кутів $\angle C_1QB_1$ та $\angle B_1QA_1$ відповідно, звідки

$$\angle ABC = \angle C_1QA_1 = \angle C_1QB_1 + \angle B_1QA_1 =$$
$$= 2\angle A_0QB_1 + 2\angle B_1QC_0 = 2\angle A_0QC_0 = 180^\circ - \angle ABC.$$

(остання рівність випливає з того, що A_0 та A_0 – середини дуг BAC та ACB). Отже, $\angle ABC = 90^\circ$.

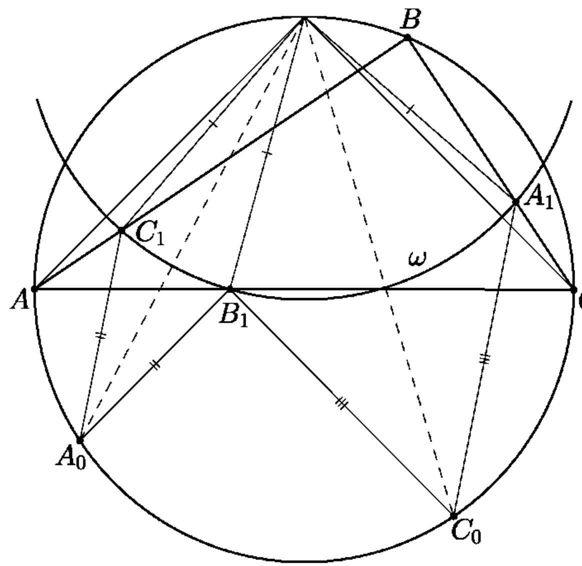


Рисунок 1. 20

Задача 4. (Таїланд) Нехай ACB — точка перетину висот гострокутного трикутника ABC. Нехай BAC - довільна точка на відрізку A_0, відмінна від A_0 та C. Позначимо

$$\angle ABC = \angle C_1QA_1 = \angle C_1QB_1 + \angle B_1QA_1 =$$
$$= 2\angle A_0QB_1 + 2\angle B_1QC_0 = 2\angle A_0QC_0 = 180^\circ - \angle ABC.$$

та $\angle B_1QA_1$ основи висот трикутника $\angle C_1QB_1$, проведених з вершин QC_0 та QA_0 відповідно. Нехай ω_1 — коло, описане навколо трикутника QA_1C_0, а X — така точка на ω_1, що B — діаметр ω_1. Аналогічно, нехай $k = 2013$ — коло, описане навколо трикутника B, а Y — така точка на QB_1C_0, що

QB_1A_0 — діаметр QC_1A_0. Доведіть, що точки $\angle C_1QA_1 = \angle ABC$ та B_0 лежать на одній прямій.

Дана задача фактично лише позначеннями відрізняється від задачі 409 «Нашого конкурсу» журналу «У світі математики» (автор В.А. Ясінський, умова в № 4, 2011). Єдина відмінність — у задачі 409 точка W була не довільною точкою на відрізку BC, а його серединою, проте ця зайва умова не використовувалася у розв'язанні автора, опублікованому в № 2, 2013.

Задача 5. (Болгарія) Позначимо $Q_{>0}$ множину всіх додатних раціональних чисел. Нехай $f: Q_{>0} \to R$ – функція, яка задовольняє такі три умови:

(i) для всіх $x, y \in Q_{>0}$ виконується нерівність $f(x)f(y) \ge f(xy)$,

(ii) для всіх $x, y \in Q_{>0}$ виконується нерівність $f(x+y) \ge f(x) + f(y)$,

(iii) існує раціональне число $a > 1$ таке, що $f(a) = a$.

Доведіть, що $f(x) = x$ для всіх $x \in Q_{>0}$.

При $x = 1, y = a$ за умовою (i) маємо $f(1) > 1$. Далі, індукцією за n з (ii) легко дістати, що

$$\text{(iv) } f(nx) \ge nf(x), \forall n \in \mathbb{N},\ x \in Q_{>0},$$

зокрема

$$\text{(v) } f(n) \ge nf(1) \ge n\ \forall n \in N.$$

Знову з (i) маємо $f(m/n)f(n) \ge f(m)$, тому $f(q) > 0\ \forall q \in Q_{>0}$. Тоді з (ii) випливає, що f строго зростає, а тому внаслідок (v)

$$f(x) \ge f([x]) \ge [x] > x - 1\ \ \forall x \ge 1.$$

З (i) індукцією за n дістаємо, що $f(x)^n \ge f(x^n)$, отже $f(x)^n \ge f(x^n) > x^n - 1$. Тому $f(x) \ge \sqrt[n]{x^n - 1}\ \forall x > 1, n \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що (iv) $f(x) \ge x\ \forall x > 1$. (Справді, якщо $x > y > 1$ то $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}) > n(x - y)$, тому при достатньо великих n маємо $x^n - 1 > y^n$, а отже $f(x) > y$)

Тепер з (i) та (vi) випливає, що $a^n = f(a)^n \ge f(a^n) \ge a^n$, тому $f(a^n) = a^n$. Розглянемо довільне $x > 1$ та оберемо $n \in \mathbb{N}$ так, що $a^n - x > 1$. Тоді з (ii),(v) маємо

$$a^n = f(a^n) \ge f(x) + f(a^n - x) \ge x + (a^n - x) = a^n,$$

Отже, $f(x) = x\ \forall x > 1$. Зокрема $f(n) = n$ при всіх натуральних $n > 1$. *Нарешті* для кожного $x \in Q_{>0}$ та кожного $n \in N, n > 1$ з (i) та (iv) випливає, що

$$nf(x) = f(n)f(x) \ge f(nx) \ge nf(x),$$

звідки $f(nx) = nf(x)$. Таким чином, $f(m/n) = f(2m)/2n = m/n$ для всіх $m, n \in N$.

Задача 6. (Росія) Нехай $n > 3$ — ціле число. Розглянемо коло та $n+1$ точок на ньому, які розбивають його на рівні дуги. Розглянемо всі способи занумерувати ці точки числами $0, 1, \ldots, n$ так, що кожне число використовується рівно один раз. Два способи, які можна дістати один з одного поворотом кола, вважаються однаковими. Нумерація називається *гарною*, якщо для будь-яких чотирьох чисел $a < b < c < d$ таких, що $a + d = b + c$, хорда, яка з'єднує точки з номерами a, d, не перетинає хорду, яка з'єднує точки з номерами b та c.

Нехай M — кількість гарних нумерацій, а N — кількість впорядкованих пар (x, y) натуральних чисел, що задовольняють умови $x+y<n$ та НСД$(x,y)=1$. Доведіть, що $M=N+1$.

Зауважимо, що інтервал $(0,1)$ містить рівно N нескоротних дробів $f_1<\ldots<f_N$, знаменники яких не більші за n, оскільки пара чисел (x,y), яка задовольняє умови $x+y\le n$, $НСД(x,y)=1$, відповідає дробу $x/(x+y)$.

Почнемо з побудови $N+1$ гарних нумерацій. Візьмемо довільне $\alpha\in(0,1)$, яке не співпадає з жодним із дробів $f_1,\ldots,f_N$. Розглянемо коло довжини 1. Послідовно відмітимо на ньому точки з номерами $0, 1, \ldots, n$, де точка 0 є довільною, а відстань за годинниковою стрілкою між точками i та $i+1$ дорівнює α. Будемо відраховувати всі відстані вздовж кола за годинниковою стрілкою. Тоді точка k знаходиться на відстані $\{k\alpha\}$ від точки 0, де $\{r\}$ позначає дробову частину числа r. Назвемо таке розміщення точок *циклічним* і позначимо $A(\alpha)$. Якщо порядок точок за годинниковою стрілкою у розміщеннях $A(\alpha_1)$ та $A(\alpha_2)$ співпадає, вважатимемо їх однаковими. На рис. 1.21 зображено циклічне розміщення $A(3/5+\varepsilon)$ точок з номерами $0,1,\ldots,13$ для дуже маленького $\varepsilon>0$.

Якщо $a<b<c<d$ задовольняють умову $a+d=b+c$, то $a\alpha+d\alpha=b\alpha+c\alpha$, а отже в $A(\alpha)$ хорда з кінцями a та d паралельна хорді з кінцями b та c, зокрема ці хорди не перетинаються. Тому нумерація, при якій номери йдуть у такому ж порядку при обході за годинниковою стрілкою, як номери точок у циклічному розміщенні, є гарною.

Тепер покажемо, що існує рівно $N+1$ різних циклічних розміщень. Розглянемо, як змінюється $A(\alpha)$ при збільшенні а від 0 до 1. Порядок точок p та q змінюється рівно в ті моменти, коли ми переходимо через значення $\alpha=f$ таке, що $\{pf\}=\{qf\}$. Це може статися тільки тоді,

коли f – один з N дробів $f_1,\ldots,f_N$. Отже, існує не більше за $N+1$ різних циклічних розміщень.

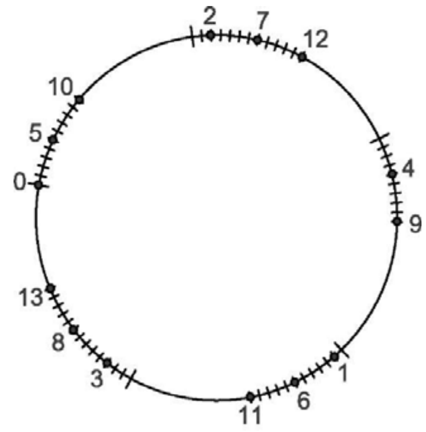


Рисунок 1. 21

Покажемо, що $N+1$ різних циклічних розміщень існує. Покладемо $f_i=a_i/b_i$, $1\le i\le N$, і візьмемо дуже маленьке число $\varepsilon>0$. У розміщенні $A(f_i+\varepsilon)$ точка k знаходиться на відстані $\dfrac{ka_i(\mathrm{mod}\,b_i)}{b_i}+k\varepsilon$ від точки 0. Тому на відстані від 0, трошки більшій за $\dfrac{1}{b_i}, 0\le l\le b_i-1$, записані у порядку зростання всі числа k, для яких ka_i-l ділиться на b_i. Звідси випливає, що першим числом після 0 за годинниковою стрілкою у розміщенні $A(f_i+\varepsilon)$ є b_i. Першим числом після 0, меншим за b_i є таке k, для якого a_ik-1 ділиться на b_i. Тоді k та b_i взаємно прості, а тому a_ik-1 ділиться на b_i при єдиному $1\le a\le b_i-1$. Це дозволяє однозначно визначити a_i та b_i, тобто відновити f_i, за циклічним розміщенням. Зауважимо також, що $A(f_i+\varepsilon)$ є відмінним від тривіального розміщення, в якому точки

$0, 1, \dots, n$ йдуть поспіль за годинниковою стрілкою. Звідси випливає, що $N+1$ циклічних розміщень $A(\varepsilon)$, $A(f_1+\varepsilon), \dots, A(f_N+\varepsilon)$ є попарно різними.

Зауважимо, що при $f_i < \alpha < f_{i+1}$ в розміщенні $A(\alpha)$ точка 0 стоїть одразу після b_{i+1} і перед b_i. Справді, ми вже довели, що b_i — перше число після 0 в розміщенні $A(f_i+\varepsilon)$, яке співпадає з $A(\alpha)$. Аналогічно перевіряється, що b_{i+1} є останнім числом перед 0 в розміщенні $A(f_i-\varepsilon)$, яке теж співпадає з $A(\alpha)$.

Нарешті покажемо за індукцією за n, що кожна гарна нумерація точок числами $0, 1, \dots, n$ відповідає деякому циклічному розміщенню. Для $n \le 2$ результат очевидний. Тепер припустимо, що всі гарні нумерації точок числами $0, 1, \dots, n-1$ відповідають циклічним розміщенням, та розглянемо гарну нумерацію. Порядок усіх номерів, крім n, відповідає деякому циклічному розміщенню $A_{n-1} = A_{n-1}(\alpha)$ точок з номерами $0,1,\dots,n-1$.

Нехай α лежить між послідовними дробами $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$ з набору нескоротних дробів, знаменник яких не перевищує $n-1$. Інтервал $\left(\frac{p_1}{q_1};\frac{p_2}{q_2}\right)$ містить щонайбільше один дріб зі знаменником n, адже інакше разом із дробами $\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}$ він містив би і дріб $\frac{i}{n} < \frac{i}{n-1} \le \frac{i+1}{n}$, що суперечить вибору $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}$.

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Інтервал $\left(\frac{p_1}{q_1};\frac{p_2}{q_2}\right)$ не містить жодного дробу зі знаменником n. У цьому випадку циклічному розміщенню $A_{n-1}(\alpha)$ точок з номерами $0,1,\dots,n-1$ відповідає

єдине циклічне розміщення $A_n(\alpha)$ точок з номерами $0,1,\dots,n$. Гарна нумерація A та гарна нумерація, яка відповідає $A_n(a)$, можуть відрізнятися лише положенням точки з номером n. Припустимо, що в $A_n(\alpha)$ точка n знаходиться одразу за x і перед y. Оскільки за доведеним вище сусідні з 0 позиції займають q_1 *та* q_2, то $x, y \ge 1$.

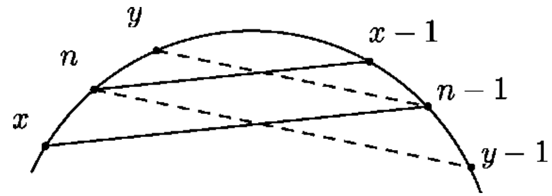


Рисунок 1. 22

В $A_n(\alpha)$ хорда з кінцями $n-1$ та x паралельна хорді з кінцями n та $x-1$ та є $y-1$ розташовані саме в такому порядку в $A_n(a)$, а отже і в A (можливо, при цьому $y = x-1$ або $x = y-1$).

При гарній нумерації A хорда, яка з'єднує точки з номерами $n-1$ та x, не перетинає хорду, яка з'єднує точки з номерами n та $x-1$. Тому точка з номером n лежить між точками з номерами x та $n-1$. Аналогічно ця точка лежить між точками з номерами $n-1$ та y. Тоді вона лежить між точками з номерами x та y, а тому A – гарна нумерація, яка відповідає циклічному розміщенню $A_n(a)$.

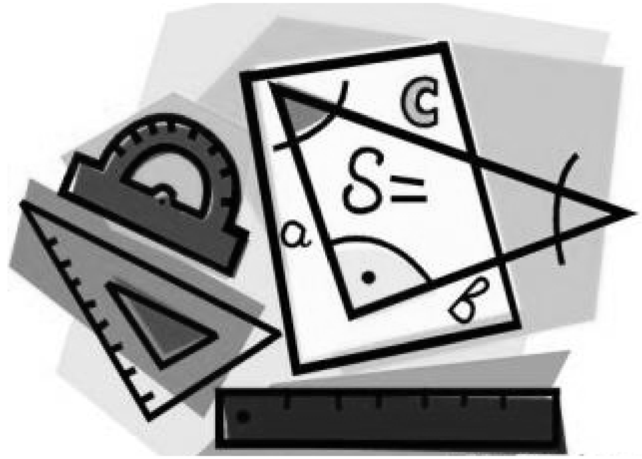
Випадок 2. Інтервал $\left(\frac{p_1}{q_1};\frac{p_2}{q_2}\right)$ містить дріб $\frac{i}{n}$.

У цьому випадку циклічному розміщенню $A_{n-1}(\alpha)$ точок з номерами $0,1,\dots,n-1$ відповідають два циклічних розміщення $A_n(\alpha_1)$ та $A_n(\alpha_2)$ чисел $0,\dots,n$, які утворюються при $\frac{p_1}{q_1} < \alpha_1 < \frac{i}{n}$ та при $\frac{i}{n} < \alpha < \frac{p_2}{q_2}$. За доведеним вище в $A_{n-1}(\alpha)$ точка 0 знаходиться між q_2 та q_1, в $A_n(\alpha_1)$ точка n лежить між q_2 та *0,* а в $A_n(\alpha_2)$ точка n лежить між 0 та q_1.

Поклавши $x = q_2$, $y = q_1$, аналогічно до міркувань з першого випадку одержимо, що при гарній нумерації A точка з міткою n має бути між точками з номерами x та y Тому A — гарна нумерація, яка відповідає циклічному розміщенню $A_n(\alpha_1)$ або $A_n(\alpha_2)$.

Отже, всі гарні нумерації відповідають циклічним розміщенням. Тому їх кількість дорівнює $N+1$, що і вимагалося довести.

РОЗДІЛ ІІ.
УЧНІВСЬКІ МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ
2013-2014 Н.Р.



ІІІ ЕТАП ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

Завдання та розв'язки першого дня (завдання достатнього рівня)

7 КЛАС

7.1. Відомо, що у понеділок Настя добиралася на автомобілі на роботу більше однієї години. Також відомо, що протягом будь-якої години руху середня швидкість її автомобіля дорівнювала 80 км/год. Чи могла його середня швидкість протягом усього шляху дорівнювати 100 км/год?

Припустимо, що автомобіль Насті рухався протягом $\frac{3}{2}$ години, перші та останні $\frac{1}{2}$ години він рухався зі швидкістю 140 км/год, а протягом $\frac{1}{2}$ години між ними він рухався зі швидкістю 20 км/год. Тоді його середня швидкість протягом будь-якої години складає 80 км/год. А його середня швидкість на усьому шляху дорівнює 100 км/год.

7.2. У Олесі є необмежена кількість цифр 3 та рівно одна цифра 4. Вона хоче утворити число, яке б ділилося на

найбільшу можливу кількість чисел з множини: $\{1, 2, 3, ..., 9\}$. Яке найменше число може утворити Олеся?

Якщо використовувати лише одну цифру 4, то отримаємо число, яке ділиться на 1, 2, 4. Якщо використовувати і цифри 3, і цифру 4, то таке число не може ділитись на 3, 6, 9 та 5. Так само воно не може ділитись на 4 та 8, бо останні дві цифри можуть бути лише 33 або 34. Таким чином, воно може ділитись максимум на три числа: 1, 2 та 7. Якщо використовувати лише цифри 3, то отримані числа можуть ділитися хіба що на 1, 3, 7, 9. Найменшим з них, яке ділиться на всі ці чотири числа, є 333333. Таке число і буде шуканим.

7.3. У клітини дошки 6×6 можна ставити зірочки (не більше 1 зірочки у клітину) таким чином, щоб у кожному рядку, кожному стовпчику та кожній з двох великих діагоналей було не більше ніж 3 зірочки. Яку максимальну кількість зірочок можна поставити на дошку за таких умов?

Зрозуміло, що більше 18 поставити не можна, бо у кожному з 6 рядків можна поставити не більш ніж 3 зірочки. Залишається навести приклад розстановки 18 зірочок, що задовольняє умови задачі. Приклад наведений нижче на рис. 2.1.

		*	*	*	
		*	*	*	
*	*				*
*	*				*
		*	*	*	
*	*				*

Рисунок 2. 1

7.4. Сторони трикутників ABC та ACD задовольняють такі умови: $AB = AD = 3$ см, $BC = 7$ см, $DC = 11$ см. Які значення може набувати довжина сторони AC, якщо вона дорівнює цілій кількості сантиметрів, є середньою у ΔACD та найбільшою у ΔABC?

Нехай $AC = x$. Тоді $x < AB + BC = 10$ та $x + AD > CD \Leftrightarrow x + 3 > 11 \Leftrightarrow x > 8$. Єдиним цілим числом, яке задовольняє обидві нерівності є $x = 9$. Залишається тільки переконатися, що сторона AC є середньою у ΔACD та найбільшою у ΔABC.

8 КЛАС

8.1. Відомо, що в понеділок Настя добиралася на автомобілі на роботу більше однієї години. Також відомо, що протягом будь-якої години руху середня швидкість її автомобіля дорівнювала 80 км/год. Чи могла його середня швидкість протягом усього шляху дорівнювати 100 км/год?

Припустимо, що автомобіль Насті рухався протягом $\frac{3}{2}$ години, перші та останні $\frac{1}{2}$ години він рухався зі швидкістю 140 км/год, а протягом $\frac{1}{2}$ години між ними він рухався зі швидкістю 20 км/год. Тоді його середня швидкість протягом будь-якої години складає 80 км/год. А його середня швидкість на усьому шляху дорівнює 100 км/год.

8.2. Відомо, що M та N два послідовних чотирицифрових числа. Яке найбільше значення може набувати різниця між сумами цифр чисел M та N?

Позначимо через $S(K)$ – суму цифр числа K. Нехай $M = N + 1$. Якщо при додаванні до N одиниці не відбувається перенесення у наступний розряд, то $S(M) - S(N) = 1$.

А при перенесенні одиниці у наступний розряд можливі

такі три випадки: 1) $N = \overline{abc9}$, $c \neq 9$, $S(N) - S(M) = 8$; 2) $N = \overline{ab99}$, $b \neq 9$, $S(N) - S(M) = 17$; 3) $N = \overline{a999}$, $a \neq 9$, $S(N) - S(M) = 26$. Останній варіант є шуканим. Прикладом такої пари чисел є, наприклад, пара $N = 1999$, $M = 2000$.

8.3. Чи можна розставити у комірках таблиці 3×5 числа 1, 2, ..., 15 таким чином, щоб:
а) суми чисел в усіх рядках були однакові, а також, щоб суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках;
б) суми чисел в усіх трьох рядках та усіх п'яти стовпчиках були однакові?

а) Відповідна розстановка чисел показана на рис. 2.2. Сума чисел у кожному рядку дорівнює 40, у кожному стовпчику дорівнює 24.

1	**11**	**5**	**14**	**9**
8	**3**	**12**	**4**	**13**
15	**10**	**7**	**6**	**2**

Рисунок 2. 2

б) Якщо припустити, що це можливо, то позначимо цю спільну суму кожного рядка та кожного стовпчика через s. Додамо усі 15 чисел по рядках, тоді ця сума стане рівною $3s$, оскільки рядків рівно 3. Якщо тепер обчислити ту ж саму суму чисел по стовпчиках, то вона дорівнює $5s$. Зауважимо, що ці суми повинні бути однакові, бо при кожному підрахуванні кожне число з чисел $1, 2, \dots, 15$ додається рівно один раз. Таким чином $3s = 5s$, що неможливо для натурального s.

8.4. Прості числа p, q та натуральні x, y задовольняють умови: $x < p$, $y < q$ та $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}$ – ціле число. Доведіть, що $x = y$

За умовою задачі $py+qx \vdots xy \Rightarrow py+qx \vdots x \Rightarrow py \vdots x \Rightarrow y \vdots x$. Аналогічно доводимо, що $x \vdots y$. Тому $x = y$.

8.5. На стороні AB трикутника ABC відмітили точку K. Відрізок CK перетинає медіану AM у точці F. Відомо, що $AK = AF$. Знайдіть відношення $MF : BK$.

I спосіб. Проведемо MN – середню лінію ΔBCK (рис. 2.3). Тоді $\angle AKF = \angle AFK = \angle NFM = \angle FNM$,

тому ΔFMN – рівнобедрений. Звідси $FM = MN = \frac{1}{2}BK$.

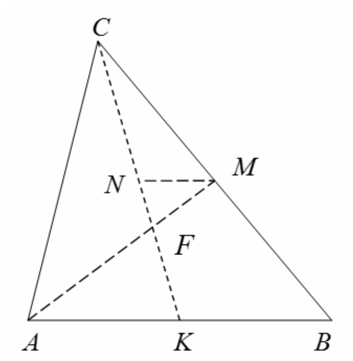


Рисунок 2. 3

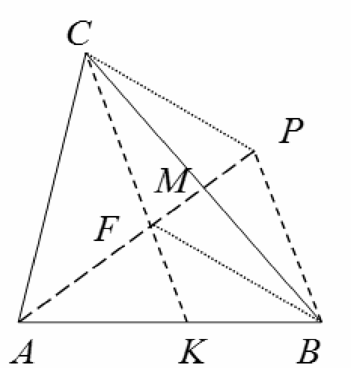


Рисунок 2. 4

II спосіб. Подовжимо відрізок FM за точку M на його довжину до точки P (рис. 2.4). Тоді $CPBF$ – паралелограм, звідки $PB \parallel FK$. Але тоді $\angle APB = \angle ABP$, тому $AP = AB$. Оскільки за умовою $AK = AF$, то $FP = KB$. А оскільки $FP = 2FM$, маємо $MF : BK = 1:2$.

9 КЛАС

9.1. Знайдіть натуральне число n, для якого існує найбільша кількість пар ненульових цифр a, b, що задовольняють умову: $\overline{ab}-\overline{ba}=n$.

Зрозуміло, що $a > b > 0$, тому можемо записати таку рівність: $n = \overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9(a-b)$. Таким чином $n = 9k$. Очевидно, що максимальна кількість пар ненульових цифр, різниця між якими дорівнює k, буде при $k = 1$, для якого існує 8 пар шуканих цифр. Тому $n = 9$.

9.2. Два кола c_1, c_2 проходять через центр O кола c та дотикаються до нього внутрішнім чином у точках A та B відповідно. Доведіть, що на прямій AB лежить спільна точка кіл c_1, c_2.

Все очевидно, якщо AB – діаметр кола c, нехай має місце розташування, як на рис. 2.5, тоді AO та BO – діаметри кіл c_1 та c_2 відповідно. Нехай друга точка їх перетину – точка M. Тоді $\angle AMO = \angle BMO = 90°$, звідки випливає, що $M \in AB$.

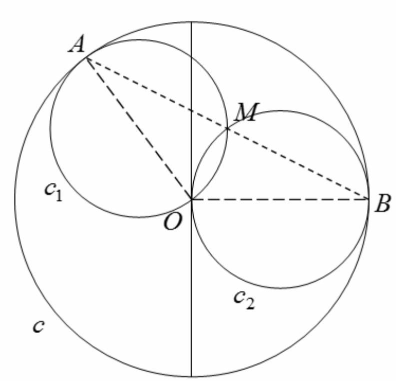


Рисунок 2. 5

9.3. ***а)*** Чи можна розставити у комірках таблиці 3×5 числа 1, 2, ..., 15 таким чином, щоб суми чисел в усіх рядках були однакові, а також, щоб суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках?

б) Чи можна розставити у комірках таблиці 4×5 числа 1, 2, ..., 20 таким чином, щоб суми чисел в усіх рядках були однакові, а також, щоб суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках?

а) Відповідна розстановка чисел показана на рис. 2.6. Сума чисел у кожному рядку дорівнює 40, у кожному стовпчику дорівнює 24.

1	**11**	**5**	**14**	**9**
8	**3**	**12**	**4**	**13**
15	**10**	**7**	**6**	**2**

Рисунок 2. 6

б) Якщо припустити, що це можливо, то позначимо спільну суму кожного рядка через s. Додамо усі 20 чисел по рядках. Ця сума дорівнює $4s$, оскільки рядків рівно 4. З іншого боку, вона дорівнює $1+2+...+20=210$. Бачимо, що 210 не ділиться на 4, а тому не може виконуватися рівність $210=4s$.

9.4. Знайдіть усі такі натуральні n, для яких числа $12n-119$ та $75n-539$ є квадратами натуральних чисел.

Позначимо $a^2=12n-119$ та $b^2=75n-539$. Тепер звільнимось від змінної n:

$$\frac{a^2+119}{12}=\frac{b^2+539}{75} \text{ або } 25(a^2+119)=4(b^2+539).$$

Далі перепишемо цю рівність таким чином:

$$4b^2-25a^2=819 \text{ або } (2b-5a)(2b+5a)=3^2\cdot7\cdot13.$$

Залишається перебрати варіанти з урахуванням того, що $2b-5a<2b+5a$ та

$$819=1\cdot819=3\cdot273=7\cdot117=9\cdot91=13\cdot63=21\cdot39.$$

Оскільки сума таких множників має ділитися на 4 а різниця – на 10, то цілі значення a та b отримаємо лише у трьох із шести можливих варіантів:

$$\begin{cases}2b-5a=3,\\2b+5a=273,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=27,\\b=69,\end{cases} \Rightarrow n=\frac{a^2+119}{12}=\frac{848}{12}$$ – не ціле число.

$$\begin{cases}2b-5a=7,\\2b+5a=117,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=11,\\b=31,\end{cases} \Rightarrow n=\frac{a^2+119}{12}=20$$ – перша відповідь.

$$\begin{cases}2b-5a=13,\\2b+5a=63,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=5,\\b=19,\end{cases} \Rightarrow n=\frac{a^2+119}{12}=12$$ – друга відповідь.

9.5. Дійсні числа a,b задовольняють умову: $a^{2014}+b^{2014}=a^{2016}+b^{2016}$. Доведіть, що справджується нерівність: $a^2+b^2\le2$.

Якщо $a^2+b^2=0$, то нерівність доведена. А для $a^2+b^2>0$ з врахуванням умови задачі вона випливає з очевидної нерівності

$$\left(a^{2014}+b^{2014}\right)\left(a^2+b^2\right)-2\left(a^{2016}+b^{2016}\right)=\left(a^{2014}-b^{2014}\right)\left(b^2-a^2\right)\le0.$$

10 КЛАС

10.1. Розв’яжіть нерівність:

$$\frac{(x+1)^4}{(x-1)^3}+\frac{x-1}{16}\ge\frac{(x+1)^2}{2(x-1)}.$$

Перепишемо нерівність таким чином:

$$(x-1)\left(\frac{(x+1)^4}{(x-1)^4}+\frac{1}{16}-\frac{(x+1)^2}{2(x-1)^2}\right)\ge0 \text{ або}$$

$$(x-1)\left(\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\right)^2\ge0.$$

Оскільки квадрат невід'ємний, то розв'язком нерівності будуть значення $x>1$ (оскільки $x\neq 1$ з ОДЗ), а також значення при яких квадрат дорівнює нулеві. Знайдемо їх.

$\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}=0$ або $\frac{x+1}{x-1}=\pm\frac{1}{2}$. Звідси маємо два випадки.

$2x+2=x-1$ звідки $x=-3$; або $-2x-2=x-1$ звідки $x=-\frac{1}{3}$.

10.2. Чи існують четвірки дійсних чисел a,b,c,d, що задовольняють умови:

$$a+b+c=d \text{ та } \frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{ad}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}.$$

Звівши другу умову до спільного знаменника з врахуванням першої умови отримаємо

$$\frac{cd+bd+ad}{abcd}=\frac{bc+ac+ab}{abcd} \Rightarrow$$

$$ab+bc+ca=ad+bd+cd=\left(a+b+c\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a+b\right)^2+\left(b+c\right)^2+\left(a+c\right)^2=0 \Rightarrow a=b=c=0,$$

що суперечить другій заданій умові.

10.3. Розв'яжіть у натуральних числах x,y,z систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^2=4y^2+3z^2+2, \\ 13x=4y+3z+29. \end{cases}$$

З першого рівняння системи маємо, що $x>\max\{y,z\}$ та z парне. Якщо x – парне, то у другому рівнянні отримаємо суперечність. Таким чином x – непарне. З другого рівняння також маємо таку оцінку: $13x<4x+3x+29 \Rightarrow 6x<29$, тобто $x<5$. Враховуючи сказане, отримуємо $x=3$, $z=2$. З другого рівняння системи знаходимо $y=1$.

10.4. У трикутнику ABC сторона $AC=\frac{1}{2}(AB+BC)$, BL – бісектриса $\angle ABC$, K,M – середини сторін AB і BC відповідно. Знайдіть величину $\angle KLM$, якщо $\angle ABC=\beta$.

За властивістю бісектриси за умовою задачі маємо $\frac{AL}{LC}=\frac{AB}{BC}=\frac{AK}{MC}$ (рис. 2.7). Оскільки, крім того, $AK+MC=\frac{1}{2}\left(AB+BC\right)=AC$, то $AK=AL$, $CM=CL$. Отже,

$$\angle KLM=180^\circ-\frac{180^\circ-\angle A}{2}-\frac{180^\circ-\angle C}{2}=\frac{\angle A+\angle C}{2}=90^\circ-\frac{1}{2}\beta.$$

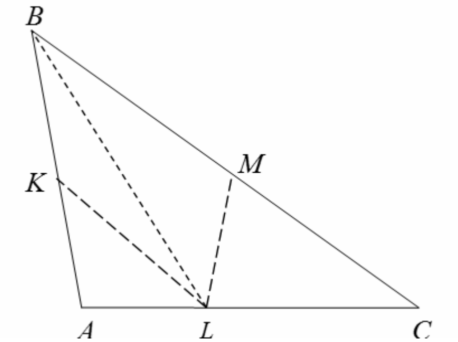


Рисунок 2. 7

10.5. На дошці записаний вираз $**...*$, що складається з непарної кількості зірочок. Андрій та Олеся грають у таку гру: вони по черзі (Андрій перший) замінюють будь-яку ще не замінену зірочку будь-якою цифрою (на перше місце не можна ставити цифру 0). Якщо в решті вийде число, що кратне 11, то перемагає Андрій, якщо ні, то – Олеся. Хто переможе при правильній грі?

Стратегія Олесі така. Якщо Андрій міняє деяку зірочку окрім першої на якусь цифру c, то Олеся міняє на таку ж цифру c будь-яку (окрім першої) зірочку, яка стоїть на місці іншої парності. Якщо тепер останнім кроком Андрій замінює першу зірочку на якусь цифру $d\neq 0$, тоді маємо, що різниця між сумою цифр на парних позиціях та на непарних дорівнює d, і це число не кратне 11, тому й одержане число не кратне 11.

Якщо Андрій не останнім ходом замінює першу зірочку на цифру $d \neq 0$, то Олеся замінює довільну зірочку на парній позиції на число $d-1$. Далі притримується раніше описаній стратегії. Тоді перед останнім ходом різниця між цифрами, що стоять на непарних місцях та цифрами на парних місцях дорівнює 1. Далі просто Андрій останнім ходом ставить цифру на непарну позицію, і досягти, щоб ця різниця стала кратною 11 (тобто бути рівним 0 або 11) не зможе.

11 КЛАС

11.1. Знайдіть усі розв'язки рівняння $2^{\sin x} = \sin 2^x$ на проміжку $[0; \pi)$.

Оскільки на проміжку $[0; \pi)$ $\sin x \geq 0$, то на цьому проміжку $2^{\sin x} \geq 2^0 = 1$, а $\sin 2^x \leq 1$. Таким чином рівність можлива лише якщо обидві функції одночасно набувають значення 1. Але $2^{\sin x} = 1$ лише при $x = 0$, а при цьому значенні $\sin 2^0 = \sin 1 < 1$. Таким чином, розв'язків не існує.

11.2. ***а)*** Відомо, що у нескінченній арифметичній прогресії натуральних чисел є деякий член, який є k–м степенем натурального числа, більшого від 1. Доведіть, що серед членів прогресії є нескінченна кількість таких, що також є k–ми степенями натуральних чисел.
б) Чи існує нескінченна зростаюча арифметична прогресія натуральних чисел жоден член якої не є вище ніж першим степенем натурального числа?

а) Якщо $d = 0$, то усі члени задовольняють умову, а при $d < 0$ серед членів прогресії не усі натуральні. Нехай прогресія має різницю $d > 0$. За умовою задачі для деяких

натуральних $m > 1$ та l справджується рівність: $a_l = m^k$. Тоді для кожного натурального n $(m + dn)^k = m^k + dN = a_l + dN =$
$= a_1 + (l-1)d + dN = a_1 + d(N + l - 1) = a_{N+l}$, що й треба було довести.

б) Розглянемо, наприклад, таку прогресію: $a_n = 2 + 4(n-1)$. Зрозуміло, що кожний її член ділиться на 2, але не ділиться на більшу степінь числа 2. Це показує, що число не може бути степенем натурального числа більше ніж перша.

11.3. Нехай a, b, c – сторони гострокутного трикутника. Доведіть, що

$$\sqrt{a^2+b^2-c^2} + \sqrt{b^2+c^2-a^2} + \sqrt{c^2+a^2-b^2} \leq \sqrt{3(ab+bc+ca)}.$$

І спосіб. Позначимо $a^2+b^2-c^2 = x^2$, $b^2+c^2-a^2 = y^2$, $c^2+a^2-b^2 = z^2$, де x, y, z – додатні числа. Тоді $a = \sqrt{\dfrac{x^2+z^2}{2}}$, $b = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$, $c = \sqrt{\dfrac{y^2+z^2}{2}}$ і нерівність переписується у вигляді

$$x+y+z \leq \sqrt{\frac{3}{2}\left(\sqrt{(x^2+y^2)\cdot(x^2+z^2)} + \sqrt{(x^2+y^2)\cdot(y^2+z^2)} + \sqrt{(z^2+y^2)\cdot(x^2+z^2)}\right)}.$$

Оскільки за нерівністю Коші-Буняковського $\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)} \geq a^2 + bc$, то права частина нерівності не менша за $\sqrt{\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}$. Отже, достатньо довести, що

$$3\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right) \geq 2\left(x+y+z\right)^2.$$

Остання нерівність рівносильна нерівності $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, яка, у свою чергу, рівносильна очевидній нерівності $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$.

II спосіб. Позначимо α, β, γ - кути трикутника, які лежать навпроти сторін a, b, c відповідно. Запишемо теорему косинусів для кожного доданка у лівій частині та застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$\sqrt{2ab\cos\gamma}+\sqrt{2bc\cos\alpha}+\sqrt{2ca\cos\beta}\le\sqrt{(ab+bc+ca)}\cdot\sqrt{2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)}\ .$$

Нерівність буде доведена, якщо справджується така нерівність:

$$\sqrt{(ab+bc+ca)}\cdot\sqrt{2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)}\le\sqrt{3(ab+bc+ca)}$$

або, що те саме, $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}$.

А ця нерівність випливає з нерівності Єнсена

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\le\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\ .$$

11.4. Побудуємо для трикутника ABC коло S, що проходить через точку B і дотикається до прямої CA у точці A, коло T, що проходить через точку C і дотикається до прямої BA у точці A. Другу точку перетину кіл S та T позначимо через D. Точку перетину прямої AD та описаного кола ΔABC позначимо через E. Доведіть, що D – середина відрізку AE.

Позначимо кути $\angle ABD=\alpha$, $\angle ACD=\beta$ (рис. 2.8). З властивостей вписаних кутів маємо, що

$$\angle CAD=\angle ABD=\alpha\ ,\ \angle BAD=\angle ACD=\beta\ ,$$

$$\angle BED=\angle BEA=\angle BCA\ ,$$

а також $\angle BAC=\angle BDE=\alpha+\beta$.

Отже, $\Delta ABD\sim\Delta CAD$ та $\Delta ABC\sim\Delta DBE$.

З пропорційності відповідних сторін подібних трикутників отримуємо рівності $\frac{AB}{CA}=\frac{BD}{AD}$ та $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{DE}$ відповідно. Звідси маємо $DE=\frac{AC\cdot BD}{AB}=AD$, що й треба було довести.

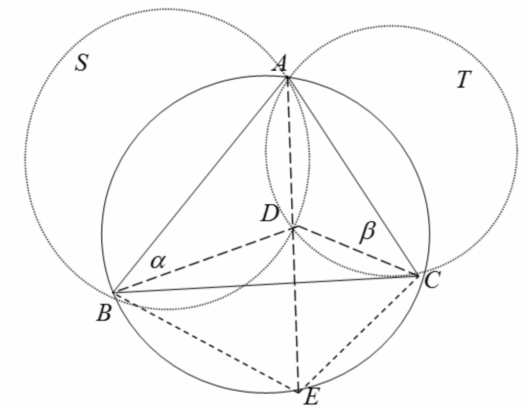


Рисунок 2. 8

11.5. На дошці записаний вираз **...*, що складається з непарної кількості зірочок. Андрій та Олеся грають у таку гру: вони по черзі (Андрій перший) замінюють будь-яку ще не замінену зірочку будь-якою цифрою (на перше місце не можна ставити цифру 0). Якщо в решті вийде число, що кратне 11, то перемагає Андрій, якщо ні, то – Олеся. Хто переможе при правильній грі?

Олеся перемагає. Стратегія Олесі така. Якщо Андрій міняє деяку зірочку окрім першої на якусь цифру c, то Олеся міняє на таку ж цифру c будь-яку (окрім першої) зірочку, яка стоїть на місці іншої парності. Якщо тепер останнім кроком Андрій замінює першу зірочку на якусь цифру $d\ne 0$, тоді маємо, що різниця між сумою цифр на парних позиціях та на непарних дорівнює d, і це число не кратне 11, тому й одержане число не кратне 11.

Якщо Андрій не останнім ходом замінює першу зірочку на цифру $d\ne 0$, то Олеся замінює довільну зірочку на парній позиції на число $d-1$. Далі притримується раніше описаній стратегії. Тоді перед останнім ходом різниця між цифрами, що стоять на непарних місцях та цифрами на парних місцях дорівнює 1. Далі просто Андрій останнім ходом ставить цифру на непарну позицію, і досягти, щоб ця різниця стала кратною 11 (тобто бути рівним 0 або 11) не зможе.

Завдання та розв'язки другого дня
(м. Рівне)

7 КЛАС

7.1. Яке з чисел більше $\frac{23^{2014}+1}{23^{2014}+2}$ чи $\frac{23^{2014}+2}{23^{2014}+3}$?

Якщо позначити $23^{2014}+1=a$ і розглянути частку $\frac{a-1}{a}:\frac{a}{a+1}=\frac{a^2-1}{a^2}<1$, то, очевидно, що друге з чисел більше.

7.2. 2014 солдатів вишикувались в шеренгу. Чи завжди можна вишикувати їх за зростом, якщо дозволяється міняти будь-яких двох солдат, що стоять через одного?

Ні, адже коли найвищий солдат стоїть на парному місці, він ніколи не зможе стати на непарне перше.

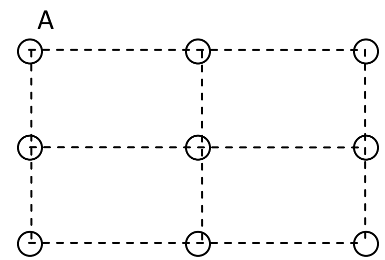
7.3. Розв'яжіть рівняння $(2x-y)^2+(y-2)^2+|x+y+z|=0$.

Сума невід'ємних чисел рівня нулю, що можливо лише у випадку, коли $2x-y=0,\ y-2=0,\ |x+y+z|=0$. Розглядаючи спочатку другий, потім перший, а тоді третій доданки, знаходимо, що $y=2, x=1, z=-3$.

7.4. Катруся і Петрик по черзі виставляють на круглий стіл по одній шашці. Хто з дітей має шанс виграти і яка його виграшна стратегія? Першою ходить Катруся.

Виграти може Катруся. За свій перший хід вона ставить шашку в центр стола, а кожним наступним ходом виставляє шашку симетрично відносно центру столу до шашки, яку перед цим поставив Петрик.

7.5. На площині виставлені 9 точок так, як показано на малюнку. Скільки можна побудувати трикутників з однією вершиною в точці А, а двома іншими – в двох з решти точок?



Інші дві вершини можна вибрати $8\cdot7$ способами. Врахувавши, що які б ми точки *B* та *C* не обрали, ΔABC і ΔACB - власне один і той же трикутник. Тому кількість різних трикутників $\frac{8\cdot7}{2}$. Оскільки три точки, які лежать на одній прямій, не утворюють трикутник, то всього трикутників можна побудувати $\frac{8\cdot7}{2}-3=25$.

8 КЛАС

8.1. На дошці виписані числа від 1 до мільйона. Замість кожного з них записали суму його цифр. Цю дія повторювали до тих пір, поки на дошці не лишились записаними мільйон одноцифрових чисел. Яких чисел більше серед записаних на дошці: 1 чи 2?

Враховуючи ознаку подільності на 9, отримані одноцифрові числа будуть давати при діленні на 9 такі ж остачі, як і самі виписані числа. Одиниць буде на 1 більше, оскільки остача від ділення 1000000 на 9 – одиниця.

8.2. Чи існують цілі числа *x*, *y*, *z*, які задовольняють рівність $(x+y)(y+z)(z+x)=2013$?

Якби такі три числа *x*, *y* та *z* існували, принаймні два з них мали би однакову парність. Припустимо, це пара чисел *x* та *y*. Тоді сума $x+y$ — парна, а отже парним мав би бути й добуток $(x+y)(y+z)(z+x)$. Число ж 2013, якому цей добуток повинен дорівнювати, — непарне. Одержана суперечність показує, що цілих чисел, які задовольняють умову, не існує.

8.3. 40 восьмикласників вишикували в один ряд плечем до плеча. За командою всі спочатку повернулись на 90° (хто вліво, хто вправо). За 1с кожні двоє учнів, що опинились лицем один до одного, повернулись на 180°. Ще за 1с знову кожні двоє учнів, що опинились лицем один до одного, повернулись на 180° і так далі. Довести, що не пізніше, ніж через 13хв рух припинився.

Позначивши «1» – учня, що повернувся вліво, а «0» – учня, що повернувся вправо, помітимо, що комбінація «01» за наступний хід стане – «10». Припустимо, що одиниць менше. Розглядатимемо ряд починаючи з лівого кінця. Щонайбільше за 39с перший учень уже не буде повертатись (стане «1»). Далі, якщо другий учень не «1», то стане таким щонайбільше за 38с після моменту, коли перший учень припинив рух. І так далі. Передостанній учень стане «1» за 1с. Тоді $39+38+37+\ldots+2+1=780c=13хв$.

8.4. Знайдіть цифри x, y, z, які задовольняють рівності $x\cdot\overline{xy}=\overline{zzz}$. Тут $\overline{abc}=100a+10b+c$.

Врахувавши, що $111=37\cdot 7$, приходимо до висновку, що $\left(x\cdot\overline{xy}\right)\vdots 111$. Звідки $x\in\{3,7\}$. Переперевіркою знаходимо, що $x=3, y=7, z=7$.

8.5. У трикутнику дві висоти не менші, ніж сторони, до яких вони проведені. Знайти кути трикутника.

Нехай у трикутнику *ABC* проведено бісектрису *AL* кута *A*, висоту *BH* та серединний перпендикуляр до сторони *AB* в точці *M*, які перетнулися в точці O (див. рисунок 2.9).

Тоді за властивістю бісектриси кута (трикутника) маємо, що *OH*=*OM*. Звідси випливає, що прямокутні трикутники *AMO* і *AHO* рівні (за катетом і гіпотенузою).

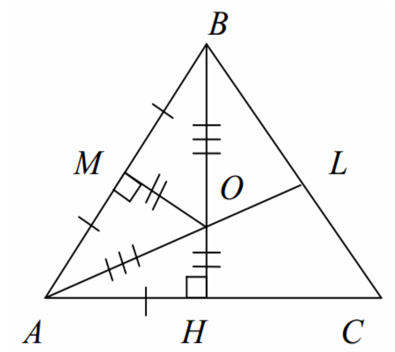


Рисунок 2. 9

Оскільки *OM* є одночасно і висотою і медіаною трикутника *AOB*, то трикутник *AOB* є рівнобедреним з основою *AB*. Тому $\angle BAO=\angle ABO$. Таким чином, з урахуванням рівності вказаних трикутників, маємо рівність відповідних кутів, а саме: $\angle AOH=\angle AOM=\angle MOB$. Оскільки $\angle AOH+\angle AOM+\angle MOB=180^\circ$, то $\angle AOH=\angle AOM=\angle MOB=60^\circ$. Тоді з трикутника MBO (прямокутній) – $\angle MBO=30^\circ$, з трикутника *AHO* (прямокутний) – $\angle BAC=60^\circ$

Оскільки $\angle AOH=\angle BOL=60^\circ$, то з трикутника BOL – $\angle OBL=30^\circ$. Тоді $\angle ABC=\angle ABO+\angle OBL=30^\circ+30^\circ=60^\circ$. Очевидно, трикутник *ABC* – рівносторонній.

Відповідь: 60°, 60°, 60°.

9 КЛАС

9.1. Довести, що для будь-якого натурального n серед чисел $\{10^n\cdot\sqrt{2}\}$ нема однакових. Тут $\{x\}=x-[x]$, де $[x]$ - найбільше ціле число, яке не перевищує x.

$\sqrt{2}$ - ірраціональне, тобто нескінченний неперіодичний дріб, тому кожна послідовність цифр (після коми) у числі $\{10^n\cdot\sqrt{2}\}$ не повториться жодного разу. Тобто не знайдеться двох однакових чисел $\{10^n\cdot\sqrt{2}\}$ для будь-якого натурального n.

9.2. Відомо, що x, y, u, v - чотири попарно різні числа, для яких справедлива рівність $\frac{x+u}{x+v} = \frac{y+v}{y+u}$. Знайдіть суму цих чисел.

З умови $y+u \neq 0, x+v \neq 0$, тому справедливими є перетворення $\frac{x+u}{x+v} = \frac{y+v}{y+u} \Rightarrow xu - yu + xv + u^2 = xy + xv + yv + v^2$ $\Rightarrow xu - yu + xv - yv + u^2 - v^2 = 0$ $\Rightarrow (x-v)(x+y+u+v) = 0$. Оскільки всі числа попарно різні, то $x - v \neq 0$. Тому $x + y + u + v = 0$.

9.3. Задано трикутник зі сторонами $a, b, c : a \geq b \geq c$, площа трикутника $S = 1$. Доведіть, що $b \geq \sqrt{2}$.

Як відомо, $S = \frac{bc \cdot \sin(\widehat{b,c})}{2} \leq \frac{bc}{2} \leq \frac{b^2}{2}$. Тоді $b \geq \sqrt{2}$.

9.4. Доведіть, що коли a, b, c – дійсні додатні числа, то справедливою є нерівність:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

I спосіб

Оскільки $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1 = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1}{4} \cdot 4 \geq 4\sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot 1} = 4$.

Отже, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.

Рівність має місце, коли $a = b = c = 1$.

II спосіб

Не обмежуючи загальності, $a \leq b \leq c$. Позначимо $\frac{b}{a} = p, \frac{c}{b} = q, p \geq 1, q \geq 1$. Тоді нерівність з умови перепишеться у наступному вигляді: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + pq \geq 3$.

Оскільки $(p-1)(q-1) \geq 0 \Rightarrow pq \geq p + q - 1$, то:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + pq \geq \left(\frac{1}{p} + p\right) + \left(\frac{1}{q} + q\right) - 1 \geq 2 + 2 - 1 = 3.$$

Рівність має місце, коли $\frac{1}{p} + p = \frac{1}{q} + q = 2 \Rightarrow p = q = 1$. Звідси $a = b = c = 1$.

9.5. У числі 2^{2014} закреслили першу цифру і додали до числа, що лишилось. Цю дію повторяли до тих пір поки на дошці не лишилось десятицифрове число. Доведіть, що в записі цього числа є хоча б дві однакові цифри.

В результаті таких перетворень остача від ділення числа на 9 не зміниться. Якщо припустити, що в записі числа не буде двох однакових цифр, то тоді це число буде записане цифрами 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 (усі будуть зустрічатись). Їх сума рівна 45, отже, число поділиться на 9, а це не можливо.

10 КЛАС

10.1. Розв'яжіть систему:

$$\begin{cases} xyz = x + y + z, \\ yzt = y + z + t, \\ ztx = z + t + x, \\ txy = t + x + y. \end{cases}$$

З виродженого рівняння $a^3 = 3a$ системи знаходимо його корені $0, \pm\sqrt{3}$, за якими будуємо відповідні розв'язки системи $(0,0,0)$ і $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})$. Дослідимо тепер існування розв'язків системи, в яких не всі компоненти однакові. Нехай (x, y, z, t) - розв'язок системи і, наприклад, $x \neq t$. Віднімемо від обох частин першого рівняння відповідні частини другого рівняння $yz(x-t) = x - t \Rightarrow yz = 1$. Тепер з першого рівняння системи $y + z = 0$, а тому $y^2 = -1$.

Суперечність, яку дістали, свідчить про те, що система не має розв'язків, відмінних від вказаних вище.

10.2. Знайдіть всі функції $f: R \to R$, такі, що $x(f(x)+f(-x)+2)+2f(-x)=0, \forall x \in R$.

Виконаємо заміну $x \to -x$ і отримаємо $-x(f(-x)+f(x)+2)+2f(x)=0$. Додамо до отриманої рівності рівність з умови завдання, матимемо $f(x)+f(-x)=0$ - шукана функція непарна. Врахувавши непарність шуканої функції, перетворюючи рівняння з умови, знайдемо, що $f(x)=x$. Перевіркою переконуємось, що $f(x)=x$ - розв'язок нашого рівняння.

10.3. Розв'яжіть нерівність $2^{n-1} \le n!$. Тут $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot .....\cdot (n-1)\cdot n$.

Нерівність рівносильна нерівності $\frac{n!}{2^n} \ge \frac{1}{2}$.

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{2} \ge \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{2}.$$

10.4. Доведіть, що коли $m>2, m \in N$, то сума усіх натуральних чисел, які менші за m і взаємно прості з m (у тому числі й 1), кратна m.

Нехай k - довільне натуральне число, яке взаємно просте з m і менше, ніж m. Покажемо, що $m-k$ і m теж взаємно прості, оскільки в протилежному випадку існувало б таке $n, n \ne 1$, для якого $m-k=np, m=nq \Rightarrow k=n(q-p)$ - тобто $m-k$ і m не взаємно прості. Отже, всі числа, які менші за m і взаємно прості з m (у тому числі й 1),можна розбити на пари $(k, m-k)$, серед яких нема рівних ($m>2$). Оскільки сума кожної пари рівна m, то сума всіх таких чисел кратна m.

10.5. В просторі задано 4 точки, які не лежать в одній площині. Скільки існує різних паралелепіпедів з вершинами у цих точках?

Виберемо із даних точок A, B, C. За умовами четверта точка D лежить поза площиною ABC. Можливі три випадки: із сторін трикутника ABC є ребрами паралелепіпеда 1) дві сторони, 2) одна сторона, 3) ні одна не є ребром.

В першому випадку пару ребер з трьох сторін можна вибрати трьома способами. При кожному виборі ребер однозначно визначається площина ABC. При цьому точка D повинна лежати в паралельній грані і може в ній займати одну з чотирьох вершин. Тому в першому випадку існує 3*4=12 різних паралелепіпедів.

В другому випадку будь-яку сторону можна вибрати в якості ребра. При кожному такому виборі одна з решти двох сторін, що лишились, має бути діагоналлю деякої грані паралелепіпеда. Тому точка D може займати будь-яке з двох положень на ребрі, паралельному ребру, вибраному на площині ABC. Тому різних паралелепіпедів в цьому випадку 3*2*2=12.

В третьому випадку в площині ABC нема жодної вершини паралелограма, і точка D може займати положення будь-якої з 5 вершин, що лишились, кожен раз визначаючи один і лише один паралелепіпед.

Всього існує 12+12+5=29 різних паралелепіпедів.

11 КЛАС

11.1. Знайдіть суму:

$$\frac{\sin 1}{\cos 0\cdot\cos 1}+\frac{\sin 1}{\cos 1\cdot\cos 2}+\frac{\sin 1}{\cos 2\cdot\cos 3}+\ldots+\frac{\sin 1}{\cos 2013\cdot\cos 2014}.$$

Можна помітити, що $\sin 1 = \sin(k-(k-1)) = \sin k\cdot\cos(k-1) - \sin(k-1)\cdot\cos k$. Тоді вихідну суму можна переписати у вигляді $tg\,1 - tg\,0 + tg\,2 - tg\,1 + tg\,3 - tg\,2 + \ldots + tg\,2014 - tg\,2013 = tg\,2014$.

11.2. На площині розставлено n точок так, що будь-який трикутник з вершинами у цих точках має площу $S \le 1$. Доведіть, що всі точки можна накрити трикутником з площею 4.

Серед усіх трикутників з вершинами в даних точках виберемо трикутник $A_1B_1C_1$ найбільшої площі $S \le 1$. Через кожну його вершину проведемо пряму, паралельну до протилежної сторони. Площа трикутника ABC, утвореного цими прямими, дорівнює $4S \le 4$.

Лишається довести, що цей трикутник ABC містить всі дані точки. При доведенні скористаємося тим, що всі трикутники зі спільною стороною a, які мають площу S (або меншу), розташовані в смузі між двома прямими, паралельними до основи a, які знаходяться на від неї на відстані $h_a = \dfrac{2S}{a}$ (аналогічно і для сторін b,c). Отже, всі трикутники з площею $S \le 1$, лежать в області, обмеженій прямими, проведеними паралельними до сторін трикутника $A_1B_1C_1$ на відстані $h_a\,(h_b, h_c)$ від сторін $B_1C_1(A_1C_1, A_1B_1)$ - тобто в межах трикутника ABC, площа якого $4S \le 4$. Тому дійсно, Доведіть, що всі точки можна накрити трикутником з площею 4.

11.3. На дошці виписані числа від 1 до 20. По черзі витираються будь-які два числа $(x;y)$, а замість них записується число $x+y+5xy$. Чи можна вкінці отримати число 20132014?

Після будь-яких перетворень сума чисел, записаних на дошці буде кратною 5, але число 20132014, не ділиться на 5. Тому відповідь: ні, не можна отримати число 20132014 після проведення вказаних в умові перетворень.

11.4. Доведіть нерівність $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y} \ge x+y+z, xyz>0$.

Врахувавши, що $xyz>0$, помножимо обидві частини нерівності на xyz. Нерівність буде рівносильною нерівності

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} \ge \frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{y}\right)^2 \ge 0.$$

11.5. Знайти функцію f з областю визначення $R\setminus\{0\}$, що задовольняє функціональне рівняння $2f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)-3f\left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)=\dfrac{13x-4}{2x-3x^2}$.

Поклавши $\dfrac{3x-2}{2x+1}=\dfrac{t}{t-1}\left(x \ne -\dfrac{1}{2}; t \ne 1\right)$, звідки $x=\dfrac{3t-2}{t-3}$, і врахувавши, що $t \ne \dfrac{2}{3}$ дістанемо при підстановці в вихідне рівняння:

$$2f\left(\frac{3t-2}{2t+1}\right)-3f\left(\frac{t}{t-1}\right)=\frac{(t-3)(5t-2)}{2t-3t^2}$$ або

$$2f\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)-3f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{(x-3)(5x-2)}{2x-3x^2}.$$

Розв'язавши відповідну систему рівнянь, запишемо розв'язок $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{x-1}{x}\left(x \ne -\dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{2}{3}\right)$ і, нарешті, поклавши $\dfrac{x}{x-1}=z\left(z \ne -2; 0; \dfrac{1}{3}\right)$ так, що $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{1}{z}$, дістанемо: $f(x)=\dfrac{1}{z}$. Перевіркою переконуємось, що розв'язок задовольняє рівняння.

LIV ВСЕУКРАЇНСЬКА УЧНІВСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ (IV ЕТАП)

Завдання та розв'язки першого дня

8 КЛАС

8.1. Відомо, що до натурального числа n можна дописати справа будь-яку ненульову цифру c і одержане число буде ділитися націло на c. Знайдіть найменше значення, яке може приймати число n.

Помітимо, що якщо к числу n дописати справа цифру c, то ми отримаємо число $10n+c$. Для того, щоб це число ділилось на c, необхідно й достатньо, щоб $10n$ ділилося на c. Тобто, для того, щоб виконувалась умова необхідно, щоб $10n$ ділилося на всі натуральні число від 1 до 9. Для будь-якого натурального n число $10n$ буде ділитися на 1, 2 та 5. Для подільності на інші цифри, треба щоб число n ділилося на 4, 7 та 9. Але тоді воно повинно ділитись на $4 \cdot 7 \cdot 9 = 252$, тому менше ніж 252 число n бути не може. Нескладно переконатися, що число 252 умову задовольняє, а тому є шуканим.

Відповідь**:** $n = 252$.

8.2. Два кола γ_1 та γ_2 однакового радіуса перетинаються у точках A та B. Коло γ, з центром у точці A, перетинає коло γ_1 у точках C та D. Доведіть, що точки перетину кіл γ та γ_2 належать прямим BC та BD.

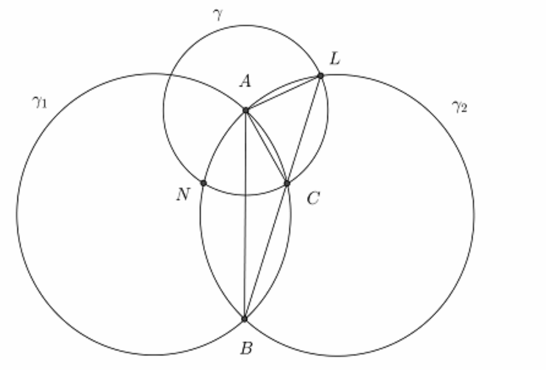


Рисунок 2. 10

Позначимо через L та N точку перетину γ та γ_2 (рис.2.10). Тоді очевидно, що $AC = AL$, оскільки це радіуси кола γ. Оскільки кола γ_1 та γ_2 мають однаковий радіус, то вписані кути ABC та ABL цих кіл спираються на однакові хорди, тому вони є рівними. З рівності цих кутів і випливає твердження задачі.

8.3. Чи існують натуральні числа $a_1, a_2, ..., a_{2014}$, для яких справджується рівність:

$$a_1 \cdot 2013^{a_1} + a_2 \cdot 2013^{a_2} + ... + a_{2013} \cdot 2013^{a_{2013}} =$$
$$= a_{2014} \cdot 2013^{a_{2014}} ?$$

Без обмеження загальності можемо вважати, що $a_1 \le a_2 \le ... \le a_{2013} < a_{2014}$, звідки випливає, що $a_{2013} + 1 \le a_{2014}$. Тому

$$a_1 \cdot 2013^{a_1} + a_2 \cdot 2013^{a_2} + ... + a_{2013} \cdot 2013^{a_{2013}} \le$$
$$\le a_{2013} \cdot 2013^{a_{2013}} + a_{2013} \cdot 2013^{a_{2013}} + ... + a_{2013} \cdot 2013^{a_{2013}} =$$

$$= 2013 \cdot a_{2013} \cdot 2013^{a_{2013}} = a_{2013} \cdot 2013^{a_{2013}+1} <$$
$$< (a_{2013}+1) \cdot 2013^{a_{2013}+1} \leq a_{2014} \cdot 2013^{a_{2014}}.$$

Звідси й випливає, що таких наборів не існує.

Відповідь**:** таких чисел не існує.

8.4. ***а)*** Чи можна обійти клітчасту дошку 4×6 ходом шахового коня таким чином, щоб побувати на кожному полі рівно 1 раз?

б) Чи можна при цьому це зробити так, щоб з останнього поля можна було ходом коня попасти на початкове?

Шаховий кінь може піти на будь-яке поле дошки якщо воно розташоване на іншому кінці української літери „Г”, тобто спочатку кінь пересувається на дві клітини по горизонталі чи по вертикалі, а далі на одну клітину перпендикулярно початковому напряму).

а) Шуканий приклад наведений на рис.2.11.

1	20	5	16	9	14
4	23	2	13	6	17
21	12	19	8	15	10
24	3	22	11	18	7

Рисунок 2. 11

б) Доведемо методом від супротивного. Припустимо відповідний обхід існує. Розфарбуємо клітини дошки у 4 кольори, як це показано на рис. 2.12.

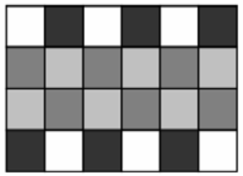


Рисунок 2. 12

Позначимо кольори – Б (білий), Ч (чорний), Т (темно сірий) та С (світло сірий). Клітин кожного кольору по 6. Бачимо, що з клітини Ч можна попасти лише у клітину С, а також у клітину Ч можна попасти тільки з клітини С. Аналогічно пов’язані кольори Б та Т: з клітин Б можна попасти тільки на клітини Т, а також на Б можна попасти лише з Т. Випишемо ланцюжок ходів, який обходить дошку потрібним чином, тоді буква Ч повинна оточуватись з обох боків буквами С, так само для букв Б, які повинні оточуватись буквами Т, при умові, що це не перша чи остання клітина маршруту. Оскільки кожної з букв на дошці рівна кількість, то кожна буква Ч не може бути не крайньою, бо тоді 6 літер Ч повинні оточуватись принаймні 7 буквами С, а їх усього 6. Таким чином – Ч та Б повинні бути крайніми у цьому ланцюгу. За припущенням з останньої клітини можна попасти на першу, але якщо вони мають кольори Ч та Б – це неможливе. Одержана суперечність завершує доведення.

Відповідь**:** ***а)*** можна; ***б)*** не можна.

9 КЛАС

9.1. Задача **8.2.**

9.2. Андрій та Олеся грають у таку гру. Спочатку Андрій розставляє по колу усі 10 цифр. Після цього Олеся вибирає цифру, і від цієї цифри рухається по колу за рухом годинникової стрілки, групуючи послідовно цифри по 2. Таким чином утворюються 5 двоцифрових чисел (число на кшталт 06 також враховуємо як одноцифрове число 6). Після цього Олеся додає ці 5 чисел і виграє одержану суму у Андрія. Який найменший програш може гарантувати собі Андрій?

Після того, як Андрій виставить свої 10 цифр по колу, у Олесі є два варіанти обрати п’ятірку чисел. Наприклад, якщо по колу у порядку за годинниковою стрілкою записані такі цифри: $\overline{a_0 a_1 \ldots a_9}$, то вона може обрати одну з двох сум:

$$S_1 = \overline{a_0 a_1} + \overline{a_2 a_3} + \ldots + \overline{a_8 a_9} \text{ або } S_2 = \overline{a_9 a_0} + \overline{a_1 a_2} + \ldots + \overline{a_7 a_8}.$$

Зрозуміло, що вона обере більше значення з двох.

Тепер зауважимо, що

$$S_1 + S_2 = \overline{a_0 a_1} + \overline{a_1 a_2} + \ldots + \overline{a_8 a_9} + \overline{a_9 a_0} =$$
$$10(a_0 + a_1 + \ldots + a_9) + (a_0 + a_1 + \ldots + a_9) =$$
$$= 11 \cdot (a_0 + a_1 + \ldots + a_9) = 11 \cdot 45 = 495.$$

Таким чином сума цих двох варіантів однакова. Оскільки вона обирає більше з цих чисел, то Андрій повинен таким чином розставити цифри, щоб різниця між цими числами була найменшою з можливих. Тоді найбільше з двох чисел і буде найменшим.

Тепер побачимо, що

$$S_1 = \overline{a_0 a_1} + \overline{a_2 a_3} + \ldots + \overline{a_8 a_9} = 10(a_0 + a_2 + \ldots + a_8) +$$
$$+(a_1 + a_2 + \ldots + a_9) = 10(a_0 + a_2 + \ldots + a_8) +$$
$$+(a_1 + a_2 + \ldots + a_9 + a_0 + a_2 + \ldots + a_8) - (a_0 + a_2 + \ldots + a_8) =$$
$$= 9(a_0 + a_2 + \ldots + a_8) + 45 \,\vdots\, 9.$$

Тобто, кожна з сум кратна 9, а тому їх мінімальна різниця так само повинна бути кратною 9. Оскільки сума цих чисел непарна, то рівними вони не можуть бути, тому найменша можлива різниця між ними – це 9. Тобто ці числа повинні дорівнювати 252 та 243.

Таким чином, залишається навести приклад розстановки чисел, щоб саме такі два числа могла одержати Олеся. Оскільки $98 + 76 + 54 + 21 + 03 = 252$, то по колу Андрій може розставити числа, наприклад, таким чином: $9, 8, 7, 6, 5, 4, 2, 1, 0, 3$.

9.3. Нехай $a, b > 0$ дійсні числа. Відомо, що $\left(a^2 + b^2\right)\left(a - b + 1\right) \ge b$. Доведіть, що $a\left(a + b\right) \ge b$.

Очевидно, що при $a \ge 1$ нерівність виконується. Нехай $a < 1$ і припустимо, що $a\left(a + b\right) < b$. В такому випадку $b > \frac{a^2}{1-a}$.

Доведемо, що початкова нерівність не виконується. Якщо вона правильна, то

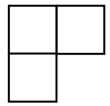
$$a^3 + a^2 \ge b^3 - b^2 + b - ab^2 + ba^2 = b(b-1)^2 +$$
$$+(1-a)b^2 + ba^2 > b(b-1)^2 + 2ba^2 > \tfrac{a^2(b-1)^2}{1-a} + 2ba^2.$$

Оскільки $a > 0$, то

$$1 + a > \tfrac{(b-1)^2}{1-a} + 2b,\; 1 - a^2 > \left(b-1\right)^2 + 2b\left(1-a\right) = b^2 + 1 - 2ab,$$

звідки $0 > b^2 + a^2 - 2ab = \left(a - b\right)^2$ – суперечність. Отже, $b \le \frac{a^2}{1-a}$, що і треба було довести.

9.4. Яку найбільшу кількість кутиків з трьох клітинок (див. рис.) можна розмістити всередині клітчастого квадрата 7×7 так, щоб вони попарно не дотикалися сторонами?



(Дотикання кутами припускається.)

Приклад для 9 кутів зображено на рис.2.13.

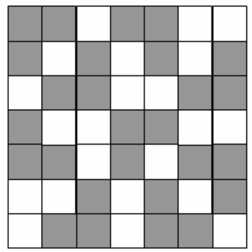


Рисунок 2. 13

Доведемо, що більшу кількість кутів розмістити не вдасться. Припустимо, що ми розмістили 10 кутиків так, щоб вони задовольняли умові. Розглянемо кожен з них. Пофарбуємо наступні відрізки, як це показано на рис. 2.14 – тут сторону маленького квадрату вважаємо рівною $\frac{1}{2}$, тобто ми одиничні квадрати розбили навпіл на 4 менших рівних квадратики.

Для кожного з кутиків загальна довжина пофарбованих відрізків складає 11, тому їх загальна довжина складає 110. При цьому, як легко зрозуміти, в жодної пари кутиків немає спільних пофарбованих відрізків, але відрізки можуть виходити за межі квадрату (а саме ті, що йдуть з середніх сторін).

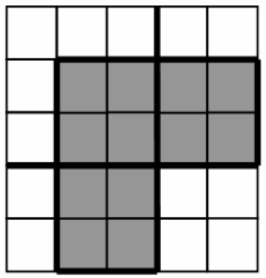


Рисунок 2. 14

Тепер розглянемо одну з сторін великого квадрату. Пофарбуємо на ній всі відрізки, які не належать сторонам кутиків – їх загальна довжина як мінімум 2, що неважко зрозуміти з того, що кутики не можуть дотикатися сторонами, а їх найбільша сторона дорівнює 2; очевидно, що вони не були пофарбовані раніше. Також зітремо всі відрізки, які виходять з середин двоклітинних сторін кутиків і виходять за межі квадрата, причому один кінець яких лежить на цій стороні квадрата – оскільки таких кутиків для даної сторони не більше 2, то загальна довжина стертих відрізків буде не більше 1. Таким чином, сумарна довжина відрізків зросла не менш, ніж на 1. Оскільки є всього 4 сторони квадрата, то вона зросла мінімум на 4 і стала мінімум 114. Але всі відрізки тепер йдуть по лініям сітки квадрата, не співпадають і не виходять за його межі. Але у такому випадку їх довжина не може бути більше за сумарну довжину всіх ліній сітки квадрата, а саме $2 \cdot 7 \cdot 8 = 112 < 114$. Суперечність.

10 КЛАС

10.1. Для якого найбільшого натурального n існує набір з n натуральних чисел, який має таку властивість: серед чисел набору рівно одне число ділиться на n, рівно два числа діляться на $n-1$, і так далі, рівно $n-1$ число з цього набору ділиться на 2 і усі n чисел діляться на 1?

Спочатку наведемо шуканий приклад для $n = 5$. Наприклад, умову задовольняють такі числа: $60; 12; 6; 2; 1$.

Припустимо такий набір існує при $n \geq 6$. Тоді $n-1$ число ділиться на 2, $n-2$ числа діляться на 3. Тобто максимум одне число не ділиться на 2 і максимум два не діляться на 3, тому максимум три числа не діляться на 6, тому мінімум $n-3$ числа кратні 6, але за умовою їх повинно бути рівно $n-5$. Одержана суперечність завершує доведення.

Відповідь**:** $n = 5$.

10.2. Коло γ описане навколо гострокутного трикутника ABC, AD та AL – його висота та бісектриса відповідно. Позначимо через W, T, A' другі точки перетину з колом γ прямих AL, WD, TL відповідно. Доведіть, що AA' – діаметр кола γ.

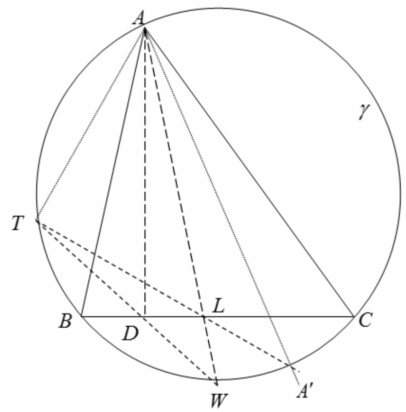


Рисунок 2. 15

Якщо $AB = AC$, то твердження очевидне. Інакше, спочатку покажемо, що $\angle TAL = \angle TDB$ (рис. 2.15). Дійсно,
$\angle TAL = \frac{1}{2}\cup WT$, $\angle TDB = \frac{1}{2}(\cup TB + \cup WC) = \frac{1}{2}(\cup TB + \cup WB) = \frac{1}{2}\cup TW$
оскільки AL – бісектриса, тому $\angle BAW = \angle WAC$, звідки $\cup WC = \cup WB$.

З доведеної рівності $\angle TAL + \angle TDL = 180°$, тому точки A, T, D, L лежать на одному колі. Тоді $\angle A'TA = \angle LTA = LDA = 90°$, звідки й випливає потрібне твердження.

10.3. Чи існує геометрична прогресія натуральних чисел $b_0, b_1, ..., b_{2014}$ із знаменником відмінним від 10, яка задовольняє таку умову: число b_{i+1} має у своєму десятковому записі рівно на одну цифру більше, ніж число b_i для усіх i від 0 до 2013?

Розв'яжемо задачу для довільного скінченого натурального n і прогресії $b_0, b_1, ..., b_n$.

Виберемо $b_0 = 10^{kn}$, де натуральний параметр k визначимо пізніше, та $q = \frac{10^{k+1}+1}{10^k}$. Тоді

$$b_i = b_0 q^i = \frac{10^{kn}(10^{k+1}+1)^i}{10^{ki}} = 10^{kn-ki}(10^{k+1}+1)^i,\ 0 \le i \le n.$$

Для того, щоб виконувались умови задачі, достатньо, щоб $\forall i = \overline{0, n}$ виконувалась умова:

$$10^{kn+i} \le b_i = 10^{kn-ki}(10^{k+1}+1)^i < 10^{kn+i+1}.$$

Спочатку покажемо, що ліва нерівність справджується $\forall k \in N$, дійсно

$$10^{kn+i} = 10^{kn-ki} \cdot 10^{ki+i} < 10^{kn-ki}(10^{k+1}+1)^i = b_i.$$

Тепер знайдемо за яких умов може справджуватись права нерівність.

$$b_i = 10^{kn-ki}(10^{k+1}+1)^i < 10^{kn+i+1} \Leftrightarrow (10^{k+1}+1)^i < 10^{ki+i+1} \Leftrightarrow$$
$$(10^{k+1}+1)^i < 10^{(k+1)i} \cdot 10$$
$$\Leftrightarrow \left(\tfrac{10^{k+1}+1}{10^{k+1}}\right)^i < 10 \Leftrightarrow \left(1 + \tfrac{1}{10^{k+1}}\right)^i < 10.$$

Якщо вибрати k, що задовольняє умову $i \le 10^{k+1}$, то будемо мати таку нерівність:

$$b_3 + b_4 + ... + b_n < b_2 \le b_3 + b_4 + ... + b_n + a_1.$$

Для її доведення, якщо не використовувати властивості послідовності $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, можна провести такі міркування при $m > 10^{k+1}$:

$$\left(1+\tfrac{1}{m}\right)^m = 1 + \tfrac{1}{m}C_m^1 + \tfrac{1}{m^2}C_m^2 + \tfrac{1}{m^3}C_m^3 + ... + \tfrac{1}{m^m}C_m^m <$$
$$= 1 + 1 + \left(1-\tfrac{1}{m}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\tfrac{1}{m}\right)\left(1-\tfrac{2}{m}\right)\tfrac{1}{3!} + ... +$$
$$+ \left(1-\tfrac{1}{m}\right)\left(1-\tfrac{2}{m}\right)...\left(1-\tfrac{m-1}{m}\right)\tfrac{1}{m!} <$$
$$< 2 + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + ... + \tfrac{1}{m!} < 2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + ... + \tfrac{1}{2^{m-1}} < 3 < 10.$$

Таким чином, щоб ця нерівність справджувалась $\forall i = \overline{0, n}$, треба щоб виконувалась нерівність $n \le 10^{k+1}$. Це є достатньою умовою для вибору потрібного значення k.

Тепер повернемось до початкової задачі, у якій $n = 2014$. Достатньо обрати $k = 3$. Оскільки $2014 < 10000 = 10^4$, то для прогресії з нульовим членом $b_0 = 10^{3 \cdot 2014} = 10^{6042}$ та знаменником $q = \frac{10001}{1000}$ виконуються потрібні умови.

<u>*Альтернативне розв'язання*</u>**.** Нехай, як і раніше, q – знаменник прогресії. Нехай для деякого натурального k виконується умова: $b_0 = 10^k$. Для існування шуканої прогресії достатньо існування такого q, щоб виконувались умови:

$$10^{k+i} \le b_0 q^i < 10^{k+i+1},\ b_0 q^i \in N,\ i = \overline{0, 2014}. \quad \textbf{(1)}$$

Тоді, з урахуванням значення b_0, першу умову можна записати таким чином:

$$10^i \le q^i < 10^{i+1} \text{ або } 10 \le q < 10^{\frac{i+1}{i}},\ i = \overline{0, 2014}. \quad \textbf{(2)}$$

Підберемо q таким, що задовольняє умову $10 < q < 10^{\frac{2015}{2014}}$. Тоді автоматично виконуються умови **(2)**, оскільки $q < 10^{\frac{2015}{2014}} < 10^{\frac{i+1}{i}} \Leftrightarrow \frac{2015}{2014} < \frac{i+1}{i}$, а остання нерівність для натуральних i просто перевіряється. Для цього достатньо знаменник прогресії q шукати у такому вигляді:

$$q = 10,\underbrace{00...0}_{p}1 = 10 + 10^{-p-1}.$$

Зрозуміло, що таке p існує, бо $10^{\frac{2015}{2014}} > 10$, а $q = 10,\underbrace{00...0}_{p}1 \to 10$ при $p \to \infty$, тому знайдеться шукане значення p.

Тепер залишається досягти умови натуральності членів прогресії, тобто $b_0 q^i \in N$, тут достатньо вибрати $b_0 = 10^{2014\cdot(p+1)}$.

Твердження доведене.

10.4. Нехай є зв'язний граф з вершинами $A_1, A_2, ..., A_n$. Позначимо $d_{i,j}$ – найменшу кількість ребер, які необхідно пройти, щоб дістатися з вершини A_i у вершину A_j. Знайдіть найбільше можливе значення суми: $D = \sum\limits_{1 \le i < j \le n} d_{i,j}$.

Розглянемо такий граф, що має максимальне значення D (або один з таких графів). Якщо в цьому графі є цикл, то вилучимо з нього ребро, граф залишиться зв'язним, а величина D принаймні не зменшується. Продовжуючи таким чином, одержимо зв'язний граф без циклів, тобто дерево. Відомо, що в такому графі знайдеться хоча б дві висячі вершини (тобто вершини степінь яких дорівнює 1).

Позначимо дві висячі вершини A_n та A_{n-1}. Нехай

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n-2} d_{n,j} \ge \beta = \sum_{j=1}^{n-2} d_{n-1,j}.$$

Позначимо $d = d_{n,n-1}$. Перемалюємо граф таким чином, як показано на рис.2.16.

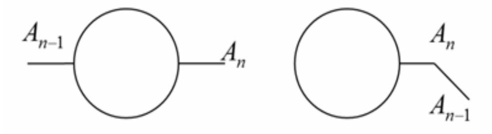


Рисунок 2. 16

Обчислимо, як зміниться при цьому значення D.

$$\Delta = \alpha + n - 2 + 1 - \beta - d = (\alpha - \beta) + (n - 1 - d).$$

Оскільки $\alpha \ge \beta$, то $\Delta \ge (n-1) - d$. І якщо тепер $d < n-1$, то ми можемо збільшити D. Але нескінченно довго ми не можемо збільшувати D, то ми прийдемо до випадку $d = n-1$, але тоді граф – ланцюг рис. 2.17.

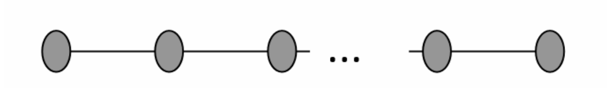


Рисунок 2. 17

Тому $D \le \sum\limits_{1 \le i < j \le n} |i - j|$ і це значення досягається на ланцюгу. Залишається його обчислити:

$$D \le \sum_{1 \le i < j \le n} |i - j| = 1 + (1+2) + ... + (1 + 2 + ... + (n-1)) = \frac{n(n^2-1)}{6}.$$

Відповідь. $\frac{1}{6} n(n^2 - 1)$.

11 КЛАС

11.1. Знайдіть усі значення параметру a, при яких нерівність

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{a-x^2} \le \sqrt{2x-2x^2}$$

має єдиний розв'язок у дійсних числах.

Якщо позначити три вирази

$$A = x - a,\ B = a - x^2 \text{ та } C = 2x - 2x^2,$$

то з умов задачі маємо такі дві умови:

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} \le \sqrt{C} \text{ та } 2A + 2B = C.$$

Після піднесення до квадрату нерівності одержимо, що

$$A + 2\sqrt{AB} + B \le C = 2A + 2B \Leftrightarrow 2\sqrt{AB} \le A + B.$$

Остання нерівність виконується при усіх можливих значеннях A, B. Таким чином розв'язком нерівності є її ОДЗ. Воно задається такими трьома нерівностями:

$$x \ge a\,,\ a \ge x^2 \text{ та } x \ge x^2\,.$$

Зрозуміло, що $a \ge 0$, крім того справджується умова: $a < \sqrt{a} \quad \Rightarrow \quad a \in [0;1]$. За таких значень параметра a розв'язком нерівності є множина $a \le x \le \sqrt{a}$, таким чином єдиний розв'язок цієї нерівності буде за умови $a = \sqrt{a}$, тобто $a \in \{0, 1\}$.

Відповідь: $a \in \{0, 1\}$.

11.2. Задача 10–2.

11.3. Для яких натуральних $n \ge 3$ існує набір прямокутників $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, які мають таку властивість: будь-який з цих прямокутників можна покрити усіма іншими $n-1$-м прямокутником з цього набору, але не можна покрити ніякими $n-2$-ма іншими прямокутниками з цього набору? (Прямокутники можна розташовувати в будь-якому з двох положень, при яких їх сторони є паралельними двом заданим перпендикулярним прямим).

Нехай прямокутники мають розміри $a_i \times b_i$, $i = \overline{1, n}$. Для виконання умови необхідно, щоб сторони прямокутників задовольняли нерівностям: $a_1 < a_2 < ... < a_n \le b_n < b_{n-1} < ... < b_1$.

Покажемо далі, що достатньо щоб вони задовольняли такі умови:

$$b_2 + b_3 + ... + b_{n-1} < b_1 \le b_2 + b_3 + ... + b_n\,, \qquad (1)$$

$$b_3 + b_4 + ... + b_n < b_2 \le b_3 + b_4 + ... + b_n + a_1\,, \qquad (2)$$

$$b_4 + b_5 + ... + b_n + a_2 < b_3 \le b_4 + b_5 + ... + b_n + a_1 + a_2\,,$$

$$a_1 + a_2 < a_3\,,$$

$$b_5 + ... + b_n + a_2 + a_3 < b_4 \le b_5 + ... + b_n + a_1 + a_2 + a_3\,,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 < a_4\,,$$

....

$$b_{k+1} + b_{k+2} + ... + b_n + a_2 + a_3 + ... + a_{k-1} < b_k \le b_{k+1} + b_{k+2} + ... + b_n + a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}\,, \qquad (3)$$

$$a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} < a_k\,, \qquad (4)$$

....

$$b_n + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} < b_{n-1} \le b_n + a_1 + a_2 + ... + a_{n-2}$$

$$a_1 + a_2 + ... + a_{n-2} < a_{n-1}$$

$$a_1 + a_2 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} = a_n\,. \qquad (5)$$

Пара нерівностей (3), (4) гарантує, що прямокутник $a_k \times b_k$ не вдасться покрити менш ніж $n-1$-м прямокутником, а $n-1$-м – вдасться. Пояснимо, чому це так. Будемо говорити, що прямокутник розташовано *горизонтально*, якщо його горизонтальна сторона не коротша за вертикальну, й *вертикально* у протилежному випадку. Будемо вважати, що прямокутник $a_k \times b_k$ розташовано горизонтально. Тоді прямокутниками, що залишилися його можна покрити наступним чином (рис. 2.18). З іншого боку, меншої кількості прямокутників не вистачить. Дійсно, якщо якісь з прямокутників $a_1 \times b_1$, …, $a_{k-1} \times b_{k-1}$ розташовувати не вертикально, а горизонтально, то довжин їх вертикальних сторін не вистачить, щоб покрити вертикальну сторону прямокутника $a_k \times b_k$, оскільки справджується нерівність (4), а тоді всередині нього непокритою все одно залишиться деяка смужка довжиною b_k, яку іншими прямокутниками покрити не вдасться. А тоді, максимальна сума горизонтальних сторін буде як раз

$$b_{k+1} + b_{k+2} + ... + b_n + a_2 + a_3 + ... + a_{k-1}\,,$$

що за умовою (3) менше ніж b_k.

Набір прямокутників, що задовольняє нашим нерівностям, можна побудувати наступним чином. Спочатку послідовно обираємо $a_1, a_2, ..., a_n$ так, щоб виконувались нерівності (4) при усіх $k=\overline{2,n-1}$ й a_n з умови (5). Далі виберемо $b_n=a_n$, після чого послідовно будемо обирати числа $b_{n-1},b_{n-2},...,b_3$ так, щоб вони задовольняли нерівностям (3) при $k=\overline{3,n-1}$, а далі число b_2, що задовольняє умову (2) та число b_1 з нерівності (1).

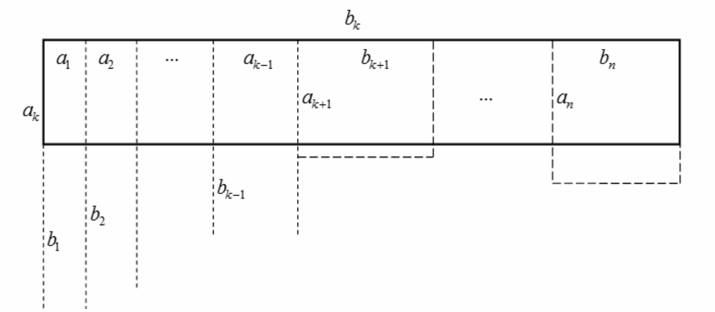


Рисунок 2. 18

Відповідь**:** Для довільного n.

11.4. Чи для довільної скінченної підмножини A натуральних чисел існує просте число p таке, що для кожного числа a, що належить A, знайдеться натуральне число x таке, що $x^2-a \vdots p$, але x не ділиться націло на p?

Покажемо, що для довільної скінченної підмножини існує потрібне p. Нехай T – множина всіх тих простих чисел, які є дільниками хоча б одного числа з A. Так, як множина A – скінченна, то T – теж скінченна. За теоремою Діріхле існує просте число вигляду $p=k\cdot\left(4\cdot\prod\limits_{q\in T}q\right)+1$.

Покажемо, що це просте число нам підходить.

З визначення p випливає, що для довільного $q\in T$ символ Лежандра $\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{1}{q}\right)=1$. p дає остачу 1 по модулю 4, тому перша частина рівності слідує з квадратичного закону взаємності Гауса, а друга з того, що p

дає остачу 1 по модулю q. Отже, кожне просте число з множини T є квадратичним лишком по модулю p. Але ж кожен елемент з A є добутком якихось елементів з T, тому сам є квадратичним лишком, а це і вимагалося від p.

Відповідь. Так, для довільної.

Завдання та розв’язки другого дня

8 КЛАС

8.5. Є $n \geq 3$ мишачих нірок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Миші грають у таку гру. Вони повинні по черзі вибігати із своїх нірок і бігти строго по прямій до однієї з тих нірок, які знаходяться на максимальній відстані від їх власної нори. Миша, шлях якої має перетнути в деякій точці, відмінній від нори, шлях іншої миші, що вже пробігла перед цим, залишається на місці. Порядок, за яким вони бігають, миші вибирають на свій розсуд.

а) Яка максимальна кількість мишей зможе пробігти свій шлях за таких умов?

б) Яка мінімальна кількість мишей має пробігти свій шлях за таких умов?

а) Нехай $\Delta A_1A_2A_3$ – рівносторонній трикутник (див. рис.2.19), точки $A_4, A_5, ..., A_n$ розташовані на дузі кола маленького радіуса біля основи висоти, проведеної з вершини A_3. Тоді спочатку проводяться $n-3$ відрізки A_3A_j, $j=\overline{4,\ n}$, які показують маршрут мишей $A_4, A_5, ..., A_n$. А далі миша A_1 біжить до норки A_2, миша A_2 біжить до норки A_3, миша A_3 біжить до норки A_1.

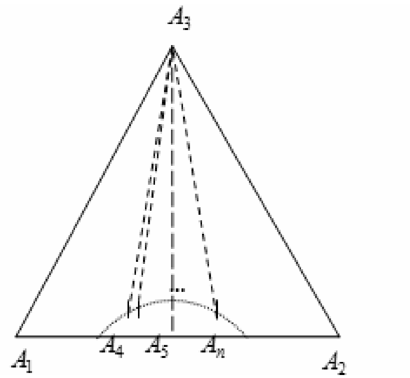


Рисунок 2. 19

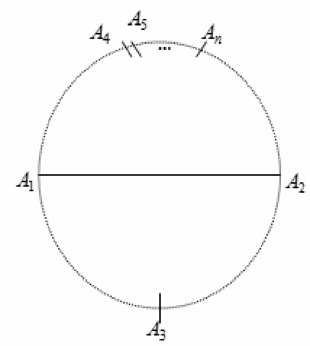


Рисунок 2. 20

б) Нехай $n \geq 4$. Розглянемо розташування мишей на колі радіуса 1. При цьому миші A_1 та A_2 утворюють горизонтальний діаметр (див. рис.2.20). Точка A_3 розташована у нижній точці цього кола, решта точок $A_4, A_5, ..., A_n$ розташовані на колі біля точки, що діаметрально протилежна то точки A_3. Тоді зрозуміло, що якщо першою пробіжить миша з норки A_1, то вона прокреслить діаметр $A_1\ A_2$. Після цього за правилами жодна миша пробігти вже не зможе, оскільки найвіддаленішою для A_2 є миша A_1, для мишей $A_4, A_5, ..., A_n$ – A_3, а для A_3 – одна з мишей $A_4, A_5, ..., A_n$. Кожен з таких відрізків перетинає вже проведений діаметр $A_1\ A_2$, а тому не може бути проведений. Для $n=3$ зрозуміло, що жодні 3 відрізки не перетинаються по внутрішніх точках, а тому буде проведено як мінімум 2 відрізки. Відповідь**:** ***а)*** n; ***б)*** 1, для $n \neq 3$ та 2, для $n=3$

8.6. Знайдіть усі квадратні тричлени $f(x)=ax^2+bx+c$ з цілими коефіцієнтами a, b, c, які для кожного дійсного числа x задовольняють нерівності:

$$\tfrac{1}{2}x^2+2x+2016 \leq f(x) \leq \tfrac{3}{2}x^2+6x+2020.$$

Виділимо повні квадрати у кожному квадратному тричлену і будемо мати, що для усіх дійсних x повинні виконуватись такі нерівності:

$$\tfrac{1}{2}(x+2)^2+2014 \le f(x) \le \tfrac{3}{2}(x+2)^2+2014 .$$

Зрозуміло, що парабола повинна мати такий вигляд: $f(x)=a(x+2)^2+2014$, оскільки в точці $f(-2)=2014$ і вона повинна мати в точці $x=-2$ вершину. Значення в точці очевидне з наведених нерівностей. Якщо ж вершина не в цій точці, то парабола приймає значення і менше ніж 2014, що суперечить заданій нерівності. Таким чином $f(x)=a(x+2)^2+2014$, звідки для усіх дійсних x повинно справджуватись умова: $\tfrac{1}{2}(x+2)^2 \le a(x+2)^2 \le \tfrac{3}{2}(x+2)^2$. Зрозуміло, що єдине ціле значення, що йому задовольняє – це $a=1$ і шукана парабола має вигляд:

$$f(x)=(x+2)^2+2014=x^2+4x+2018 .$$

Відповідь: $f(x)=(x+2)^2+2014=x^2+4x+2018$.

8.7. Про прості числа p,q,r відомо, що числа $pq+1$, $pr+1$, $qr-p$ – є точними квадратами цілих чисел. Доведіть, що число $p+2qr+2$ – теж точний квадрат цілого числа.

Нехай $pq+1=a^2$, $pr+1=b^2$, або $pq=(a-1)(a+1)$, $pr=(b-1)(b+1)$. З першого рівняння очевидно, що або $\begin{cases} a-1=1, \\ a+1=pq, \end{cases}$ або одне з чисел $\{a-1; a+1\}$ дорівнює p, а інше – q. У першому випадку маємо $pq=3$, чого для простих чисел бути не може. Тому $|p-q|=2$. Аналогічно з другого рівняння маємо $|p-r|=2$.

З останніх двох умов маємо такі випадки:

1) $p=q-2=r+2$; 2) $p=q+2=r-2$; 3) $q=r=p\pm 2$.

У перших двох випадках ми маємо три послідовних непарних числа, кожне з яких повинно бути простим. З подільності на 3, очевидно, що це повинні бути числа $3; 5; 7$.

Трійки чисел $(5;3;7)$ і $(5;7;3)$ дійсно задовольняють умови задачі. Безпосередньою перевіркою – переконуємося, що вони задовольняють також вимогу, тобто $p+2qr+2=49=7^2$.

У третьому випадку розглянемо всі трійки простих чисел вигляду $(p; p-2; p-2)$ та $(p; p+2; p+2)$. Першим двом даним умовам вони задовольняють. Також зрозуміло, що в цих трійках не зустрічається просте число 2.

Нехай, спочатку $q=r=p-2$. Тоді $qr-p=q^2-q-2=m^2$, оскільки за умовою воно є точним квадратом. Тоді $m<q \Leftrightarrow m\le q-1$ і $q^2-q-2\le q^2-2q+1$, тобто $q\le 3$. Перевіркою впевнюємося, що значення $q=3$ підходить. Звідси маємо трійку простих чисел $(5;3;3)$, для якої $p+2qr+2=25=5^2$.

У випадку $q=r=p+2$ аналогічно маємо $q^2-q+2=m^2$, або $q\le -1$ – суперечність. Отже, всі випадки розглянуто.

8.8. На прямій зліва направо розташовані точки A, D та C таким чином, що $CD=2AD$. Точка B задовольняє умови $\angle CAB=45°$ та $\angle CDB=60°$. Знайдіть градусну міру кута BCD.

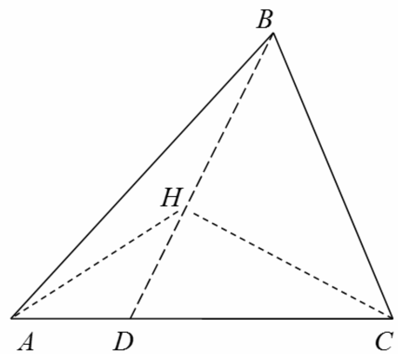


Рисунок 2. 21

Проведемо перпендикуляр CH з точки C на відрізок BD (рис. 2.21), а також відрізок AH. Нехай $AD=x$, $CD=2x$. Тоді маємо $\angle DCH=30°$, звідки $DH=x$ і ΔADH –

рівнобедрений. Оскільки $\angle ADH = 120°$, то $\angle DAH = \angle AHD = 30°$. Тому $\angle HAB = 15°$.

Крім того $\angle HBA = 15°$, тобто ΔABH – рівнобедрений, тому $AH = BH$. Оскільки $\angle HAC = 30^0 = \angle HCA$, то ΔAHC рівнобедрений, і $AH = CH$, тому ΔBHC також рівнобедрений і прямокутний, звідси

$$\angle DBC = \angle HBC = \angle HCB = 45°,$$

і остаточно маємо, що $\angle BCD = \angle DCH + \angle HCB = 45° + 30° = 75°$.

Відповідь: $\angle BCD = 75°$.

9 КЛАС

9.5. Для яких натуральних n існують числа $a_1, a_2, ..., a_n$, що задовольняють умови:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n > 0 \text{ та } a_1^3 + a_2^3 + ... + a_1^3 < 0.$$

Зрозуміло, що для $n = 1$ таких чисел не існує.

Для $n = 2$ маємо, що $a_1 + a_2 > 0$. Якщо вони обидва додатні, то одразу маємо суперечність. Якщо $a_1 > 0 > a_2 = -b_2$, то для додатних чисел маємо нерівність: $a_1 > b_2$, звідки $a_1^3 > b_2^3 = -a_2^3$, а тому й $a_1^3 + a_2^3 > 0$.

Для $n = 3$ такі числа існують. Наприклад, $a_1 = -1$, $a_2 = a_3 = \frac{2}{3}$. Тоді $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{3} > 0$, а $a_1^3 + a_2^3 + a_1^3 = -1 + 2 \cdot \frac{8}{27} = -\frac{11}{27} < 0$.

Для $n > 3$ можна навести такий приклад: $a_1 = -1$, $a_2 = a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = ... = a_n = 0$, який очевидно задовольняє умову.

Або більш змістовний приклад, який не містить нульових членів:

$a_1 = -1$, $a_2 = ... = a_n = \frac{1}{n-2}$. Для цього набору:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = -1 + \frac{n-1}{n-2} = \frac{1}{n-2} > 0.$$

$$a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = -1 + (n-1) \cdot \frac{1}{(n-2)^3} = -1 + \frac{(n-2)+1}{(n-2)^3} =$$
$$= -1 + \frac{1}{(n-2)^2} + \frac{1}{(n-2)^3} < -1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} < 0$$

Відповідь: для усіх $n \geq 3$.

9.6. Місцевість розбита на квадрати, що утворюють великий квадрат 5×5. У деяких маленьких квадратах знаходяться міни (не більше однієї у квадраті), але у яких саме квадратах вони розташовані невідомо. У капітана групи саперів є план місцевості: квадрат 5×5, у комірках якого записані числа, що показують, скільки у відповідного квадрата місцевості сусідніх квадратів, у яких є міна (наявність міни у самому даному квадраті не враховується). Сусідніми вважаються квадрати, що мають спільну вершину чи сторону. Чи завжди зможе капітан визначити загальну кількість мін на всьому полі?

Достатньо навести приклад розташувань різної кількості мін, при якому числа у кожній комірці будуть однаковими. Можливий приклад зображений на рис. 2.22.

*				*
	*			
		*		
			*	
*				*

1	2	1	1	0
2	2	2	2	1
1	2	2	2	1
1	2	2	2	2
0	1	1	2	1

		*		
	*			
*				*
			*	
		*		

Рисунок 2. 22

9.7. Максим відгадує натуральне число n, про яке йому відомо, що воно має рівно 250 натуральних дільників $1 = d_1 < d_2 < ... < d_{250} = n.$ За один хід Максим може вказати деякий індекс j, $1 \leq j \leq 249$, та дізнатися значення d_j. При цьому йому заборонено дізнаватися d_j, якщо він вже знає d_{251-j}. За яку мінімальну кількість ходів Максим може гарантовано відгадати число n?

Доведемо, що при відомих d_{248} та d_{249} число відновлюється однозначно. Розглянемо два випадки:

1) d_{249} не ділиться на d_{248}. Тоді НСК $[d_{248}, d_{249}]$ буде дільником n, більшим за d_{249}. Звідси

$$n = d_{250} = [d_{248}, d_{249}].$$

2) d_{249} ділиться на d_{248}, тоді для деякого k справджується рівність $d_{249} = kd_{248}$. Тоді відповідно $d_3 = \frac{n}{d_{248}} = \frac{kn}{d_{249}} = kd_2 > k$. Тоді $1 = d_1 < k < d_3$ теж є дільником n. З цього випливає, що $d_2 = k$, а тому $n = d_2 d_{249} = kd_{249}$.

Залишається показати, що одного ходу не досить. Припустимо протилежне - що дізнавшись єдиний дільник d_K при фіксованому K, можна однозначно визначити n.

Розглянемо прості числа $q > p > 2$ та число pq^{124} з 250 дільниками. Тоді дільники впорядковані за зростанням таким чином:

$$1 < p < q < pq < q^2 < ... < pq^k < q^{k+1} < ... < q^{124} < pq^{124}.$$

Звідси K має бути парним, інакше, дізнавшись значення непарного за номером дільника, Максим отримає деяке число q^k і не матиме жодної інформації про p, крім того, що воно менше за q. За вказаних умов це не дасть Феді можливості відрізнити pq^{124} від $2q^{124}$.

Тепер розглянемо прості числа $p < q < r$, де $r < p^2$, та число $p^{124}q$ з 250 дільниками. В цьому випадку впорядкування виглядає таким чином:

$$1 < p < q < p^2 < pq < p^3 < ... < p^{122}q < p^{124} < p^{123}q < p^{124}q.$$

Тоді, щоб отримати інформацію про q та відрізнити це число від $p^{124}r$, Максимові треба обов'язково назвати непарний індекс K. Таким чином, K повинно бути парним і непарним одночасно – суперечність.

Відповідь**:** За 2 ходи.

9.8. Гострокутний трикутник ABC вписаний у коло w_1, AN та CK його висоти, H – ортоцентр. Коло w_2, що описане навколо ΔNBK, вдруге перетинає коло w_1 у точці P. Прямі CA та BP перетинаються у точці S. Пряма SH вдруге перетинає коло w_2 у точці Q. Доведіть, що прямі NQ, PK та CA перетинаються в одній точці, або є паралельними.

При доведенні будемо впиратися на відому теорему.

Теорема. Радикальні осі трьох кіл перетинаються в одній точці або є паралельними.

Точки A, K, N, C лежать на одному колі, позначимо його w_3 (див. рис.2.23).

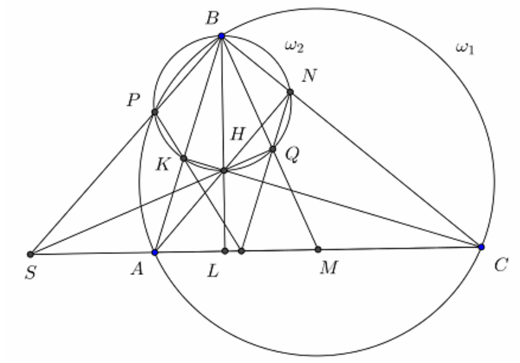


Рисунок 2. 23

Тоді радикальною віссю кіл w_1 та w_3 є пряма AC, w_1 та w_2 – пряма BP, w_2 та w_3 –пряма NK. Тоді точки N, K, S лежать на одній прямій.

Розташування точок може бути різним, тому далі ми будемо використовувати орієнтовані кути, щоб не розглядати окремі випадки. Помітимо, що $\angle(AK, KS) = \angle(AK, KN)$. Оскільки точки A, K, N, C лежать на одному колі, то

$$\angle(AK, KN) = \angle(AC, CN) = \angle(AC, CB).$$

Точки A, C, B, P теж лежать на одному колі, тому

$$\angle(AC, CB) = \angle(AP, PB) = \angle(AP, PS).$$

Таким чином ми отримали, що $\angle(AK, KS) = \angle(AP, PS)$, звідки точки A, K, S, P теж лежать на одному колі w_4.

Продовжимо BQ до перетину з AC у точці M. У колі w_2 BH – діаметр, тобто $SQ \perp BM$. Позначимо через L – точку перетину BH з AC. Тоді $\angle SQB = \angle BLS = 90°$, тобто точки B, Q, S, L належать одному колу. Звідси $\angle(LS, SQ) = \angle(LB, BQ)$, звідки випливає, що $\angle(MS, SQ) = \angle(HB, BQ)$. З іншого боку

$$\angle(HB, BQ) = \angle(HN, NQ) = \angle(AN, NQ), \text{ а}$$

$$\angle(MS, SQ) = \angle(AS, SQ).$$

Ми отримали рівність $\angle(AN, NQ) = \angle(AS, SQ)$ з якої випливає, що точки A, Q, S, N лежать на одному колі w_5.

Тому радикальною віссю кіл w_4 та w_5 є пряма AS, w_4 та w_2 – пряма KP, w_2 та w_5 –пряма QN. Звідси й випливає, що прямі NQ, PK та CA перетинаються в одній точці, або є паралельними.

10 КЛАС

10.5. Скільки існує трицифрових натуральних чисел, які не мають нульових цифр у своєму записі та задовольняють умову: при будь-якій перестановці цифр цього числа воно залишається таким, що не ділиться на 4?

Розглянемо кількість непарних цифр цього числа.

Нехай усі три цифри непарні, тоді усі такі числа умову задовольняють. Таких чисел $5^3 = 125$.

Нехай у числі одна парна цифра та дві непарні. Тоді парна цифра не може бути 2 чи 6, бо число $\overline{ab2}$ чи $\overline{ab6}$ ділиться на 4 при непарному числі b. Дійсно, $b = 2c+1$, тому

$$\overline{b2} = 10(2c+1) + 2 = 20c + 12 \vdots 4.$$

Аналогічно для числа $\overline{b6}$.

Таким чином парною може бути цифра 4 або 8 і кожне таке число умову задовольняє, бо

$$\overline{b4} = 10(2c+1) + 4 = 20c + 14 \not\vdots 4.$$

Аналогічно для числа $\overline{b8}$.

Таких чисел усього $3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 150$.

Нехай у числі одна непарна цифра та дві парні. Тоді парна цифра не може бути 2 чи 6, що випливає з попереднього пункту. Але тоді парні цифри повинні бути 4 або 8, і ці дві цифри наприкінці числа дають число, що кратне 4. Тому таких чисел для цього випадку не існує.

Якщо усі три цифри парні, то серед них не може бути цифр 4 або 8, бо тоді число $\overline{b4}$ та $\overline{b8}$ при парній цифрі b кратне 4. Тому цифри можуть бути 2 чи 6, і кожне таке число умову задовольняє. Таких чисел $2^3 = 8$.

Загалом маємо $125 + 150 + 8 = 283$.

10.6. Знайдіть найменше дійсне значення параметра C, при якому нерівність

$$\cos a + \cos b + 3\cos a \cos b \le 2\cos^2 a + \cos^2 b + C$$

виконується при всіх $0 \le a \le b \le \frac{\pi}{2}$.

При $a = b = 0$ одержимо нерівність $5 \le 3 + C$, звідки $C \ge 2$.

Доведемо, що $C = 2$ – шукане мінімальне значення.

Для цього треба довести нерівність

$$\cos a + \cos b + 3\cos a \cos b \le 2\cos^2 a + \cos^2 b + 2 \qquad (1)$$

Зробимо заміну $\sqrt{x} = \cos a$ та $\sqrt{y} = \cos b$, тоді $0 \le y \le x \le 1$. Нерівність (1) зводиться до такої нерівності: довести, що якщо $0 \le y \le x \le 1$, то справджується нерівність:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + 3\sqrt{xy} \le 2x + y + 2.$$

Останню нерівність можна перепишемо таким чином:

$$(2 - \sqrt{x} - \sqrt{y}) + (x + y - 2\sqrt{xy}) + \left(\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y})\right) \ge 0.$$

Усі три дужки невід'ємні. Перша дужка невід'ємна, оскільки $x \le 1$ та $y \le 1$, друга – з нерівності між середніми, третя – за умовою. Нерівність доведено.

10.7. Назвемо натуральне число ***солідарним***, якщо воно є взаємно простим із сумою усіх своїх натуральних дільників.
а) Яка найбільша кількість солідарних чисел може йти поспіль?
б) Яка найбільша кількість солідарних чисел може йти поспіль, якщо число 1 солідарним не вважати?

Спочатку покажемо, що парне число солідарне, якщо воно є точним квадратом або подвоєним точним квадратом.

Подамо довільне парне число у вигляді $m=2^a b$ де b – непарне число. Зрозуміло, що усі непарні дільники чисел m та b співпадають. Якщо число b не є точним квадратом, то усі його дільники можна розбити на такі пари $d<\sqrt{b}$ та $\frac{b}{d}>\sqrt{b}$, при цьому сума у кожній парі – парна. Звідси випливає, що й сума усіх дільників числа m – парна і не є взаємно простою з числом m.

Таким чином число може бути солідарним (але не обов'язково буде) лише при умові, що b є точним квадратом. Але це означає, що число $m=2^a b$ в залежності від парності параметру a воно є квадратом або подвоєним квадратом натурального числа.

Якби існувало 6 поспіль солідарних чисел, то 3 з них були б парними, тому або два з них є повними квадратами, або два з них є подвоєними квадратами. Тобто виконується одна з чотирьох умов: $x^2-y^2=2$ або $x^2-y^2=4$, або $2x^2-2y^2=2$, або $2x^2-2y^2=4$, кожна з яких не має розв’язків в натуральних числах. Наприклад, для рівняння $x^2-y^2=4$ маємо такі оцінки: зрозуміло, що $x>y$, тому

$$4=x^2-y^2=(x-y)(x+y)\geq 2y+1 \Rightarrow y\leq \tfrac{3}{2} \Rightarrow y=1.$$

Такий саме висновок має для інших рівнянь, але тоді маємо, що $x^2=3$ або $x^2=5$, або $x^2=2$, або $x^2=3$ відповідно. Жодне з них розв'язків немає.

Залишається показати, що 5 солідарних чисел поспіль існують.

а) Числа 1,2,3,4 та 5 є шуканими, в чому легко переконатись простою перевіркою.

б) У цьому пункті приклад не є таким очевидним. Пошук робиться дуже просто, треба брати квадрати парних чисел, а далі перевіряти, чи не є числа на 2 більше та менше цього квадрату подвоєними квадратами. Першими подібними числами до перевірки є 15,16,17,18,19, але, на жаль, якщо підрахувати дільники числа 15, то маємо, що їх сума складає 24 – не є взаємно простим з 15. Тобто 15 не є солідарним, тому наведена п'ятірка не задовольняє умови.

Розглянемо тепер такі числа: 575, 576, 577, 578, 579. Проведемо перевірку, що вони є солідарними (зрозуміло, що при перевірці солідарності в сумі дільників можна не враховувати саме число).

575=5*5*23 тоді 1+5+23+25+115=169 – солідарне, оскільки не ділиться ні на 5, ні на 23.

$576=2^6\cdot 3^2$, тоді 1+2+3+4+6+8+9+12+16+18+24+32+ +36+48+64+72+96+144+192+288=1075 – солідарне, оскільки не ділиться ні на 2, ні на 3.

577 – просте число, тому воно солідарне.

578=5*5*23, тоді 1+2+17+34+289=343=7*7*7 – солідарне, оскільки не ділиться ні на 2, ні на 17.

579=3*193, тоді 1+3+193=197 –солідарне, оскільки це просте число.

10.8. Вписане коло трикутника ABC дотикається його сторін AB, BC і AC в точках N, K, P відповідно. Відомо, що $AB>BC$ і бісектриси кутів A і C перетинають пряму NK в точках Q і T відповідно. Позначимо через S – точку перетину прямих AQ і TP, а через F – точку перетину прямих CT і PQ. Доведіть, що прямі NK, SF і AC перетинаються в одній точці.

Спочатку доведемо, що $\angle AQC = 90°$. Дійсно, за теоремою про зовнішній кут трикутника, маємо (рис.2.24):

$$\angle NQA = \angle BNK - \angle NAQ = (90° - \tfrac{1}{2}\angle B) - \tfrac{1}{2}\angle A = \tfrac{1}{2}\angle C.$$

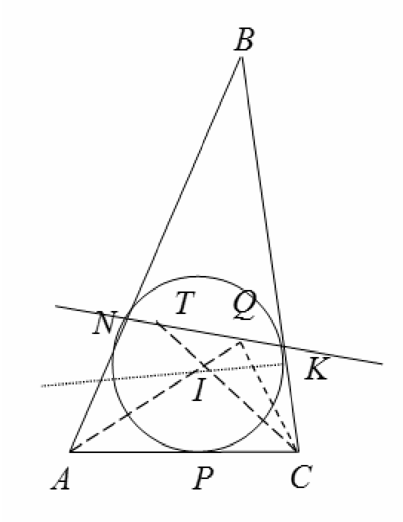


Рисунок 2. 24

Тому, $\angle TQI = \angle KCI = \frac{1}{2}\angle C$. Звідси випливає, що точки I, Q, K, C лежать на одному колі. Оскільки радіус, проведений в точку дотику, перпендикулярний до дотичної, то $\angle IKC = 90°$. Тому за теоремою про вписані кути, які спираються на одну й ту ж саму дугу кола, маємо: $\angle AQC = \angle IQC = \angle IKC = 90°$, що і треба було довести. Аналогічно доводиться, що $\angle CTA = 90°$.

З'єднаємо точки P та I, тоді $IP \perp AC$. Звідси випливає, що чотирикутники $ATIP$, $CQIP$ і $ATQC$ – вписані. Тому,

$$\angle PTI = \angle PAI = \angle CAQ = \angle CTQ = \angle ITQ,$$

тобто TI – бісектриса кута PTQ (див. рис.2.25).

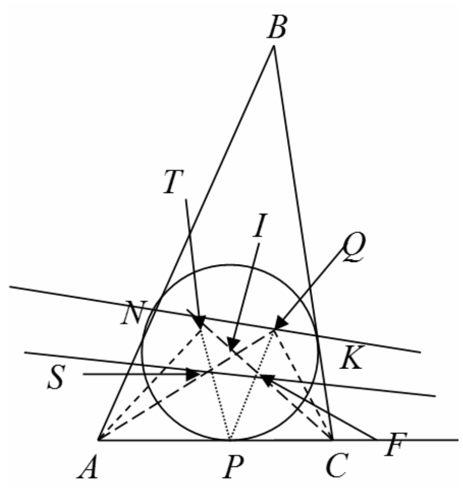


Рисунок 2. 25

Аналогічно доводиться, що QI – бісектриса кута PQT. Отже, I – точка перетину бісектрис трикутника TPQ і PI – бісектриса кута TPQ. Оскільки $AB > BC$, то промені NK і AC перетинаються в деякій точці R. При цьому, промінь PC – бісектриса зовнішнього кута при вершині P в трикутнику TPQ. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника і бісектриси зовнішнього кута трикутника, маємо:

$$\frac{PS}{ST} = \frac{PQ}{QT},\ \frac{TR}{RQ} = \frac{PT}{PQ} \text{ і } \frac{QF}{FP} = \frac{QT}{TP}.$$

Перемножуючи усі ці три рівності, одержуємо:

$$\frac{PS}{ST}\cdot\frac{TR}{RQ}\cdot\frac{QF}{FP} = \frac{PQ}{QT}\cdot\frac{TP}{PQ}\cdot\frac{QT}{TP} = 1,$$

а це означає, що точки S, F і R лежать на одній прямій (за теоремою Менелая), що і треба було довести.

11 КЛАС

11.5. На горизонтальній прямій n зліва направо розташовані точки $A_1, A_2, ..., A_9$. Відстань між кожними двома сусідніми точками дорівнює 1. Побудуємо пряму l, яка перпендикулярна n і проходить через точку A_5. Чи існує на цій прямій l принаймні одна така точка $B \neq A_5$, що серед усіх трикутників BA_iA_j, $1 \le i < j \le 9$, кількість гострокутних та тупокутних однакова?

Розв'язання. Проведемо півколо з діаметром A_1A_8 (див. рис.2.26). Покажемо, що шукана точка B – це перетин цього півкола та прямої l.

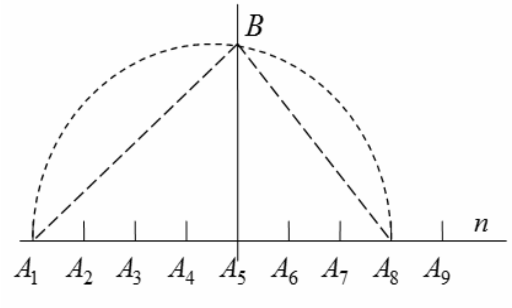


Рисунок 2. 26

Підрахуємо кількість тупокутних трикутників BA_iA_j, $1 \le i < j \le 9$: з точок $A_1, ..., A_4$ можна вибрати будь-які дві, так само і з точками $A_6, ..., A_9$. Таки трикутників по 6, разом – 12 трикутників. Якщо вибрати точки по різні боки від A_5, то тут тупокутний один – BA_1A_9, бо коло з діаметром A_1A_9 містить всередині точку B.

Тепер гострокутних трикутників. Вибираємо одну з точок $A_1, ..., A_4$, другу – з $A_6, ..., A_9$, усього – 16 трикутників. З них – тупокутний BA_1A_9, а також два прямокутних – BA_1A_8 та BA_2A_9. Таким чином їх також рівно 13. Тобто точка B – шукана.

11.6. Для яких натуральних чисел N існують такі натуральні числа x, y, що їх сума дорівнює N, а добуток ділиться на N?

Спочатку покажемо, що усі такі числа, які умову задовольняють, тобто підберемо для них шукану пару x, y. Нехай для деякого простого p $N = p^2Q$, де $Q \ge 1$. Розглянемо $x = pQ, y = p^2Q - pQ.$ Тоді $x + y = N = p^2Q,$ $xy = pQ(p^2Q - pQ) = p^2Q(pQ - Q) \vdots N.$

Нехай тепер $N = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_l$, де $p_1, p_2, ..., p_l$ – попарно різні прості числа. Тоді $y = N - x$. Припустимо, що $xy = x(N - x) = Nk, k \ge 1$. Тоді $x^2 = N(x - k)$. Звідси випливає, що $\forall i = \overline{1,l}$ $x^2 \vdots p_i$, а оскільки p_i – просте число, то й $x \vdots p_i$. Тому $x \vdots p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_l = N$, звідки $x \ge N$, що суперечить умові $y \in N$.

11.7. Вписане коло гострокутного трикутника ABC дотикається до сторін BA та AC у точках K та L відповідно. Висота AH перетинає бісектриси кутів B та C у точках P та Q відповідно. Описані кола трикутників KPB та LQC позначимо через w_1 та w_2. Доведіть, що, якщо середина висоти AH лежить зовні кіл w_1 та w_2, то дотичні до кіл w_1 та w_2, що проведені з цієї середини, є рівними.

Позначимо через N – точку дотику вписаного в ΔABC кола до сторони BC, а через I – інцентр ΔABC (рис.2.27). Крім того, нехай X точка, що симетрична N відносно точки H.

Оскільки CQ- бісектриса кута NCL, а $CN = CL$, то трикутники QLC та QNC є рівними, звідки $\angle QLC = \angle QNC$. Крім того $\angle QNX = \angle QXN$. Звідси отримаємо, що $\angle QXC + \angle QLC = 180^0$.

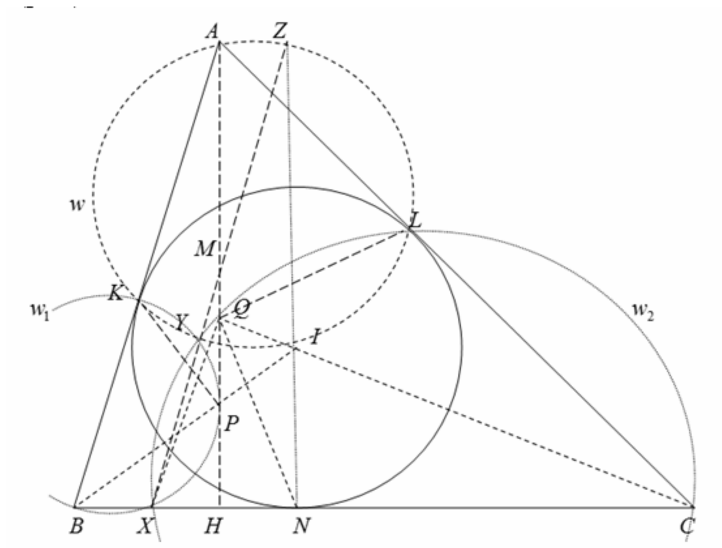


Рисунок 2. 27

Звідси випливає, що $X \in w_2$. Аналогічно $X \in w_1$, тобто точка X є спільною точкою кіл w_1 та w_2. Позначимо через Y другу точку перетину w_1 та w_2. Тоді, оскільки чотирикутники $BKYX$ та $CLYX$ – вписані, то $\angle KYX + \angle XYL = 180° - \angle B + 180° - \angle C = 180° + \angle A$, звідки $\angle KLY = 180° - \angle A$.

Тому точки A, K, Y, L циклічні. Позначимо це коло w. Другу точку перетину w та прямої XY позначимо Z. Тоді маємо, що $\angle ZAK = \angle KYX = 180° - \angle B$, звідки $AZ \parallel BC$. Крім того $\angle AKI = \angle ALI = 90°$, звідки отримуємо, що AI -- діаметр кола, описаного навколо $\triangle AKL$. Тоді $\angle AZI = 90^0$.

Оскільки $IN \perp BC$ та $ZI \perp BC$, то Z, I, N лежать на одній прямій, тому $AZNH$ – прямокутник. Оскільки $XH = NH$, то $AZHX$ - паралелограм. Позначимо точку перетину прямої XZ та висоти AH через M. Тоді M є серединою висоти. Тоді середина висоті належить прямій XY, яка є радикальною віссю кіл w_1 та w_2. Томі дотичні, що проведені з точки M до цих кіл – рівні.

11.8. Нехай A – скінченна множина функцій, що визначені на множені дійсних чисел і приймають дійсні значення. Також відомо, що для будь-яких функцій f, g, які належать A, функція $f(g(x))$ теж належить A. Відомо, що для довільної функції f з множини A існує функція g з A така, що $f(f(x)+y) = 2x + g(g(y)-x)$.

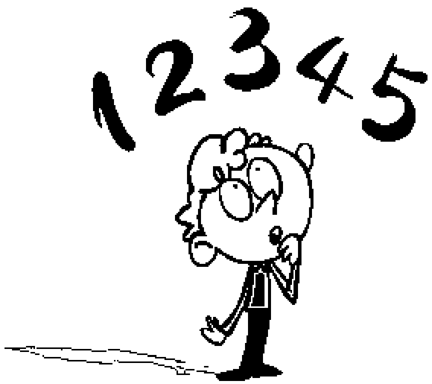
Доведіть, що функція $h(x) = x$ належить A.

Доведемо таку лему: У множині A існує функція f, для якої справджується рівність: $f(f(x)) = f(x)$.

Доведення леми. Позначимо через $f^{(k)}(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(x)\ldots))$. Зафіксуємо $f \in A$, а далі розглянемо послідовність $f = f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(4)}$, $f^{(8)}$, ..., оскільки A – скінченна, то з певного моменту ця послідовність починає повторюватись з деякого номера. Тому $f^{(2^t)} = f^{(2^s)}$ для деяких натуральних $t > s \geq 1$. Тоді $f^{(2^t)} = \left(f^{(2^s)}\right)^{(2^{t-s})} = f^{(2^s)}$, тепер покладемо $f_1 = f^{(2^s)}$, $k = 2^{t-s}$, звідки маємо, що $f_1^{(k)} = f_1$. Тепер подіємо зліва на цю рівність $f_1^{(k-2)}$ і будемо мати, що $f_1^{(k-2)} \circ f_1^{(k)} = f_1^{(k-2)} \circ f_1$ або $\left(f_1^{(k-1)}\right)^{(2)} = f_1^{(k-1)}$. Тому, якщо покласти $g = f_1^{(k-1)}$, будемо мати, що $g^{(2)}(x) = g(g(x)) = g(x)$, що й треба було довести.

Покажемо тепер, що ця функція f, для якої $f(f(x)) = f(x)$, є сюр'єктивною, звідки буде випливати, що $f(t) = t$. Дійсно, оскільки $f(x)$ приймає усі значення, то покладемо $t = f(x)$. Покладемо у задане рівняння $y = -f(x)$, тоді $f(0) - 2x = g(g(-f(x)) - x)$.

Звідси g – сюр'єкція. Якщо тепер у початковому рівнянні зафіксувати x, то права частина, з сюр'єктивності $g(x)$, приймає всі дійсні значення, тому f – сюр'єкція .



55 МІЖНАРОДНА МАТЕМАТИЧНА ОЛІМПІАДА

Задача 1. Нехай $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ – нескінченна послідовність натуральних чисел. Доведіть, що існує єдине натуральне число n таке, що

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \le a_{n+1}.$$

I спосіб. Припустимо, що є ціле додатне число n, для якого твердження задачі виконується. Розглянемо найменше таке $n = k$, тоді

$$a_k < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_k}{k} \le a_{k+1},$$

а для $n = k+1$ маємо:

$$a_{k+1} \ge \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_{k+1}}{k+1} \Leftrightarrow ka_{k+1} \ge a_0 + a_1 + \dots + a_k \Leftrightarrow a_{k+1} \ge \frac{a_0 + \dots + a_k}{k}.$$

<u>*Лема*</u>. Якщо $a_i \ge \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_i}{i}$, то $a_{i+1} \ge \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_{i+1}}{i+1}$.

Доведення леми. Справді,

$$a_i \ge \frac{a_0 + \dots + a_i}{i} \Rightarrow (i+1)a_{i+1} \ge ia_i + a_{i+1} \ge a_0 + \dots + a_{i+1} \Rightarrow \Rightarrow a_{i+1} \ge \frac{a_0 + \dots + a_{i+1}}{i+1}.$$

Лема доведена.

Оскільки $a_{k+1} \ge \frac{a_0 + \dots + a_{k+1}}{k+1}$, то використовуючи лему отримаємо, що $a_n \ge \frac{a_0 + \dots + a_n}{n}$ для довільного $n \ge k+1$. Тому, якщо існує значення n, що задовольняє умову, то таке значення єдине.

При $n = 1$ маємо, що

$$a_0 < a_0 + a_1,$$

а при $n = a_0 + 2$:

$$a_{a_0+2} \ge \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_{a_0+2}}{a_0+2} \Leftrightarrow a_{a_0+2}(a_0+1) \ge$$
$$\ge a_0 + a_1 + \dots + a_{a_0+1} \Leftrightarrow$$
$$(a_{a_0+2} - a_{a_0+1}) + (a_{a_0+2} - a_{a_0}) + \dots + (a_{a_0+2} - a_1) \ge a_0.$$

Остання нерівність виконується, оскільки $a_{a_0+2} - a_i \ge 1$, при $i \in \overline{1, a_0+1}$. Використовуючи останні дві нерівності отримуємо, що існує значення n, для якого $a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \le a_{n+1}$, а з леми випливає, що таке значення єдине, тому твердження задачі доведене.

II спосіб. Позначимо $b_n = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n}$ для кожного натурального n. Нехай для деякого n виконується нерівність $a_n < b_n \le a_{n+1}$, тоді

$$b_{n+1} = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_{n+1}}{n+1} = \frac{nb_n + a_{n+1}}{n+1} \le \frac{na_{n+1} + a_{n+1}}{n+1} = a_{n+1}.$$

Отже, в такому випадку $b_{n+1} \le a_{n+1}$. Якщо для деякого n маємо нерівність $b_n \le a_n$, то

$$b_{n+1} = \frac{nb_n + a_{n+1}}{n+1} \le \frac{na_n + a_{n+1}}{n+1} < \frac{na_{n+1} + a_{n+1}}{n+1} = a_{n+1}.$$

Звідси, для довільного $m > n$ $b_m \le a_m$, тобто нерівність $a_m < b_m \le a_{m+1}$ не виконується. Таким чином, існує не більше одного значення n, для якого $a_n < b_n \le a_{n+1}$.

Нехай тепер для деякого $n \ge 1$ $b_n > a_{n+1}$. Тоді

$$(n+1)b_{n+1} - nb_n = a_{n+1} \Rightarrow$$

$$b_{n+1} - \frac{n}{n+1}b_n = \frac{a_{n+1}}{n+1} \Rightarrow b_{n+1} - b_n = \frac{a_{n+1} - b_n}{n+1} < 0 \Rightarrow b_{n+1} < b_n.$$

Якщо $b_{n+1} > a_{n+2}$, то $b_{n+2} < b_{n+1}$ і т. д.. Послідовність $\{a_n\}$ зростаюча, причому $a_m \ge a_n + (m-n)$ (оскільки $a_n \in \mathbb{N}$), тому знайдеться таке значення m, що $b_m > a_{m+1}$ і $b_{m+1} \le a_{m+2}$. В такому випадку

$$b_{m+1} = \frac{mb_m + a_{m+1}}{m+1} > \frac{ma_{m+1} + a_{m+1}}{m+1} = a_{m+1},$$

тобто $a_{m+1} < b_{m+1} \le a_{m+2}$, а отже існує n, що задовольняє умову.

Отже, якщо умова задачі не виконується, то $b_n \le a_n$ для довільного n. Але $b_1 = a_0 + a_1 > a_1$ - суперечність, яка закінчує розв'язання.

Задача 2. Нехай $n \ge 2$ – натуральне число. Задано шахівницю $n \times n$, яка складається з n^2 одиничних клітинок. Розстановка n тур в клітинах дошки називається *мирною*, якщо в кожному горизонтальному та кожному вертикальному ряду знаходиться рівно по одній турі. Знайдіть найбільше натуральне k таке, що для кожної мирної розстановки n тур знайдеться клітчастий квадрат $k \times k$, у жодній із k^2 клітинок якого немає тури.

Нехай $l \in N$, покажемо, що: 1) при $n > l^2$ кожна мирна розстановка містить порожній (тобто такий, що не містить жодної тури) квадрат $l \times l$; 2) при $n \le l^2$ існує мирна розстановка тур, при якій такий порожній квадрат $l \times l$ не існує.

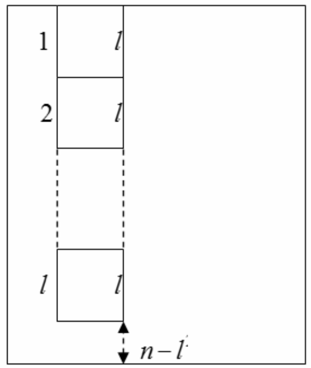


Рисунок 2. 28

1) Нехай $n > l^2$. Від супротивного, припустимо шуканого порожнього квадрату $l \times l$ не існує. Розглянемо у стовпчику l послідовних квадратів $l \times l$ розташованих, як це показане на рис. 2.28. Тоді знизу ще залишиться місце для прямокутника розміром $(n - l^2) \times l$. Якщо припустити, що кожний з квадратів $l \times l$ містить принаймні одну туру, то усього в цих l стовпчиках вже розташовано l тур. Таким чином, прямокутник $(n - l^2) \times l$ повинен бути порожнім. Оскільки ці вертикальні l стовпчиків можуть бути розташованими де завгодно, то усі нижні $n - l^2$ рядків будуть порожніми, що суперечить мирній розстановці тур.

2) Нехай тепер $(l-1)^2 < n \le l^2$. Побудуємо приклад мирної конфігурації для квадрату $n \times n$ для $n = l^2$. Далі покажемо, що робити при менших n.

Занумеруємо рядки знизу догори та стовпчики зліва направо числами $0, 1, 2, \ldots, l^2 - 1$. Тоді кожний квадрат визначається парою (r, c), де r – номер рядка, а c – номер стовпчика. Поставимо тури у квадрати з номерами $(il + j,\ jl + i)$, де $i,\ j = \overline{0,\ l-1}$. На рис.2.29 показаний приклад для $l = 3$. Оскільки кожне число від 0 до $l^2 - 1$ можна єдиним чином подати у вигляді $il + j$, $0 \le i, j \le l - 1$, то ця розстановка мирна, бо кожний рядок та кожний стовпчик містять рівно по одній турі.

								Т
					Т			
		Т						
							Т	
				Т				
	Т							
						Т		
			Т					
Т								

Рисунок 2. 29

Покажемо, що кожний квадрат $l \times l$ містить принаймні по одній турі. Розглянемо такий квадрат і позначимо його через A. Розглянемо послідовні l рядків, у яких розташований цей квадрат A. Нехай найнижчий з цих рядків має номер $pl+q$, $0 \le p, q \le l-1$, при цьому оскільки ряд найнижчий, то $pl+q \le l^2-l$. В такому випадку, тури у стовпчиках, що перетинають A, будуть знаходитись у рядках з номерами: $ql+p$, $(q+1)l+p$, ..., $(l-1)l+p$, $p+1$, $l+(p+1)$, ..., $(q-1)l+(p+1)$. Або у порядку зростання:

$$p+1,\ l+(p+1),\ \ldots,\ (q-1)l+(p+1),\ ql+p,\ (q+1)l+p,\ \ldots,$$
$$(l-1)l+p.$$

Найменше значення не перевищує $l-1$. Дійсно, якщо $p+1=l$, тобто $p=l-1$, то перше число у списку $ql+p=l-1$. Останнє не менше $(l-1)l$ та різниця між сусідніми не більша за l, тому принаймні одна з тур потрапить у один з l рядків, що задають квадрат A. Таким чином приклад шуканої мирної розстановки для $n=l^2$ наведений.

Якщо $n<l^2$, то приберемо у квадраті $l^2 \times l^2$ верхні l^2-n рядків та праві l^2-n стовпчиків. Ця розстановка також не містить порожніх квадратів $l \times l$, бо інакше його б

містив і квадрат $l^2 \times l^2$. Але обрізаний квадрат може містити порожні рядки та стовпчики. Оскільки їх кількість рівна, то неважко доповнити потрібною кількістю тур, щоб одержати мирну розстановку, яка задовольняє усі вимоги. Твердження доведене.

Задача 3. Заданий опуклий чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Точка H – основа перпендикуляра, опущеного з точки A на пряму BD. Точки S і T вибрані на відрізках AB і AD відповідно так, що точка H знаходиться всередині ΔSCT і виконуються рівності

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°,\ \angle THC - \angle DTS = 90°.$$

Доведіть, що пряма BD дотикається до кола, описаного навколо ΔTSH.

Нехай $\omega_1(O_1)$ - коло, яке описане навколо трикутника CHS, а $\omega_2(O_2)$ - коло, яке описане навколо CHT. Нехай T' і S' - другі точки перетину AS і ω_1, AT і ω_2 відповідно. Оскільки $\angle CHS - \angle CSB = 90^o$, то $\overset{\frown}{ST'C} - \overset{\frown}{CT'} = 180^o$, $\overset{\frown}{ST'} = 180^o$, тобто ST' - діаметр ω_1. Аналогічно, $S'T$ - діаметр ω_2 (рис. 2.30).

Розглянемо перетворення $\Re$, яке складається з інверсії з центром в точці A та радіусом $R=\sqrt{AC \cdot AH}$ і симетрії відносно бісектриси кута BAD. Оскільки

$$\angle HAD = 90^o - \angle ADH = 90^o - \angle ACB = \angle BAC,$$

то прямі AH і AC симетричні відносно бісектриси кута BAD, а оскільки $AC \cdot AH = R^2$, то $\Re(C)=H$. Коло ω_1 проходить через точки C і H, його центр лежить на прямій AB. Оскільки $\Re(C)=H$, $\Re(H)=C$, а $\Re(O_1) \in AD$, то коло ω_1 переходить в ω_2 (справді, таких кіл не може бути декілька, оскільки серединний перпендикуляр до CH перетинає AD рівно в одній точці). Звідси випливає, що

$\Re(S) = S'$ і $\Re(T) = T'$ (випадок $\Re(S) = T$ неможливий, оскільки $AS \cdot AT < AB \cdot AD = AC \cdot AH = R^2$).

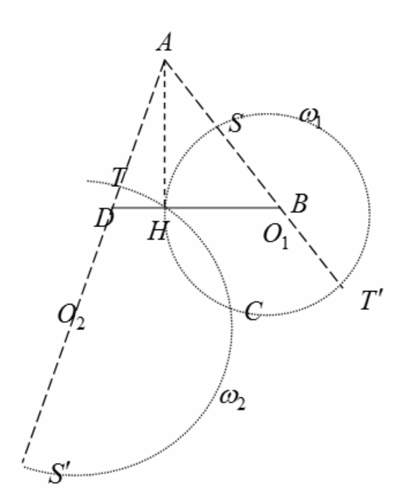


Рисунок 2. 30

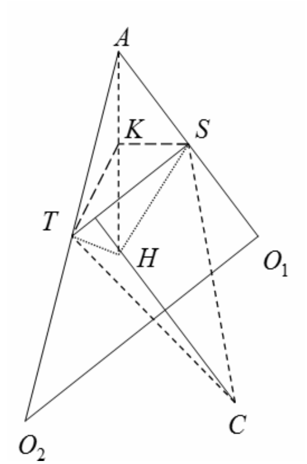


Рисунок 2. 31

Отже, $AS \cdot AS' = AT \cdot AT'$, а тому прямі TS і $T'S'$ паралельні, O_1O_2 - середня лінія трапеції, звідки $O_1O_2 \parallel ST$. Далі, O_1O_2 - лінія центрів кіл ω_1 і ω_2, HC - радикальна вісь цих кіл, тому пряма O_1O_2 перпендикулярна HC .

Нехай гомотетія з центром в точці A , яка переводить O_1O_2 в ST переводить точку H в K (рис.2.31). Оскільки

$$\angle KTS = \angle HO_2O_1 = \frac{1}{2}\angle HO_2C = \angle HTC \text{ і}$$

$$\angle KST = \angle HO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle HO_1C = \angle HSC ,$$

то C і K ізогонально спряжені в трикутнику THS . Далі, HC - висота цього трикутника, вона ізогонально спряжена з HK , а тому центр описаного кола трикутника HTS належить прямій HK , тобто BD - дотична до цього кола.

Задача 4. Точки P і Q вибрані на стороні BC гострокутного трикутника ABC так, що $\angle PAB = \angle BCA$ і $\angle CAQ = \angle ABC$. Точки M і N вибрані на променях AP і AQ відповідно так, що P – середина відрізка AM , а Q – середина відрізка AN . Доведіть, що прямі BM і CN перетинаються на колі, описаному навколо ΔABC .

Розглянемо гомотетію з центром в точці A і коефіцієнтом 1/2 (рис.2.32).

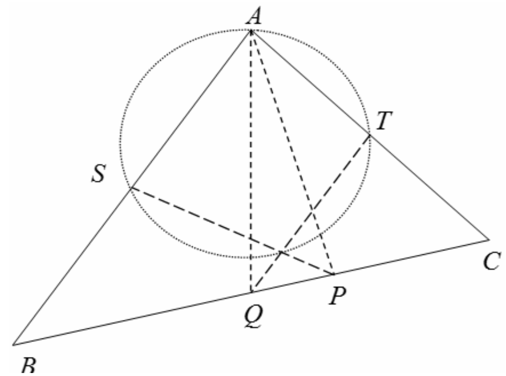


Рисунок 2. 32

Вона переводить точки N і M в точки Q і P відповідно. Точки B і C , в свою чергу, переходять в S і T , що є серединами сторін AB і AC . Таким чином, достатньо довести, що точка R , перетин прямих PS і QT , лежить на описаному колі трикутника AST. Трикутники APB і CQA подібні та однаково орієнтовані, тому орієнтовні кути між їх відповідними елементами рівні. TQ і PS - відповідні медіани, отже

$$\angle(TR,RS)=\angle(TQ,PS)=\angle(AC,AB)=\angle(TA,AS),$$

звідки випливає циклічність точок R, T, A і S.

Задача 5. Банк Кейптауна випустив монети номіналом $\frac{1}{n}$ для кожного натурального n. Заданий скінченний набір таких монет, сума номіналів яких не перевищує $99+\frac{1}{2}$ (номінали монет не обов'язково різні). Доведіть, що всі монети можна розбити на 100 або меншу кількість груп так, що сума номіналів монет у кожній групі не перевищуватиме 1.

Розв'яжемо задачу у більш загальному випадку, а саме: сума номіналів заданих монет не перевищує $N-\frac{1}{2}$ і їх можна розкласти не більше ніж на N груп, сума номіналів у кожній не перевищуватиме 1.

Спочатку зробимо таку модифікацію заданого набору номіналів монет. Якщо там є група монет, сума номіналів яких дорівнює 1, то замість них у набір кладемо монету номіналом 1, з них утворюємо окрему купку. Так само, якщо є принаймні дві монети номіналом $\frac{1}{2k}$, то ми їх замінюємо на одну монету номіналом $\frac{1}{k}$. Так зробимо доки це можливо. Зрозуміло, що якщо модифікований набір можна розбити на групи належним чином, то й початковий набір так само припускає аналогічне розбиття. Для цього достатньо просто у модифікованому наборі замінити „поєднані монети" на ті, з яких вони були утворені.

Таким чином, у заданому наборі можемо вважати, що немає монет, сума номіналів яких дорівнює 1, тобто монет номіналом $\frac{1}{2k-1}$ не більше ніж $2k-2$, а також монет номіналом $\frac{1}{2k}$ не більше нж одна.

Тепер проводимо таке розбиття заданого набору на групи. Кожна монета номіналом 1 утворює окрему групу, якщо таких монет виявилось d, то набір монет, що залишився має сумарну суму номіналів, що не перевищує $N-d-\frac{1}{2}$ та їх треба розподілити на не більше як $N-d$ груп. Як бачимо задача абсолютно ідентична початковій, а тому без обмеження загальності у початковому формулюванні можемо вважати, що монет номіналом 1 у модифікованому наборі взагалі немає.

Тепер для кожного $k=\overline{1,N}$ поєднуємо у групу G_k усі монети номіналом $\frac{1}{2k-1}$ та $\frac{1}{2k}$. Таким чином усіх груп виявилось не більше N і сумарна вага у кожній не перевищує

$$(2k-2)\cdot\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}<\frac{2k-2}{2k-1}+\frac{1}{2k-1}=1.$$

Якщо усі монети розподілені, то здача розв'язана. Припустимо, що якась монета має номінал менший від $\frac{1}{2N}$. Тоді середня вага купки не перевищує $\frac{N-\frac{1}{2}}{N}=1-\frac{1}{2N}$, таким чином, за принципом Діріхле існує принаймні одна купка, сума номіналів монет у якій дозволяє додати туди монету номіналом, меншим від $\frac{1}{2N}$. Так само розподіляється решта монет з такими номіналами.

Задача 6. Будемо казати, що прямі на площині є прямими *загального положення*, якщо жодні дві з них не паралельні і жодні три з них не проходять через одну точку. Довільні декілька прямих загального положення розбивають площину на частини; обмеженими частинами розбиття будемо називати ті з них, які мають скінченну площу. Доведіть, що для достатньо великих значень n справджується таке твердження: у кожній множині з n прямих загального положення на площині можна пофарбувати не менше $\sqrt{n}$ прямих у синій колір так, що межа кожної обмеженої частини розбиття не була повністю синьою.

Нехай задані n прямих загального положення, і з самого початку вони не пофарбовані. Тепер будемо фарбувати їх покроково у синій та білий колір. Фарбуються лише непофарбовані на попередніх кроках прямі, перефарбування неможливе.

На першому кроці фарбуємо 1 пряму у синій колір та жодної у білий.

На другому кроці фарбуємо 1 пряму у синій колір та не більше ніж 2 у білий.

На третьому кроці фарбуємо 1 пряму у синій колір та не більше ніж 4 у білий.

На k–му кроці фарбуємо 1 пряму у синій колір та не більше ніж $2k-2$ прямих у білий.

Покажемо як саме фарбуються прямі на k–му кроці. Позначимо вже пофарбовані сині прямі через $l_1, l_2, ..., l_{k-1}$. Спочатку у синій колір фарбується будь-яка ще не пофарбована пряма, яку ми позначимо через l_k. Нехай $A_1, A_2, ..., A_{k-1}$ усі точки перетину нової синьої прямої l_k з раніше пофарбованими синіми прямими $l_1, l_2, ..., l_{k-1}$. Тепер позначимо через B_i та C_i точки на прямій l_i, що є найближчими до точки A_i і лежать від неї по різні боки (якщо вони існують) для усіх $i=\overline{1,\,k-1}$ (рис.2.33).

Тепер фарбуємо у білий колір усі не пофарбовані прямі, що проходять через точки B_i та C_i, $i=\overline{1,\,k-1}$. Таким чином на k–му кроці фарбуються не більше ніж $2k-2$ прямих у білий колір. Менша кількість може виникнути тому, що або раніше вже ця пряма була пофарбована у

білий колір на одному з попередніх кроків, або у точки A_i є сусідня точка тільки з однієї сторони.

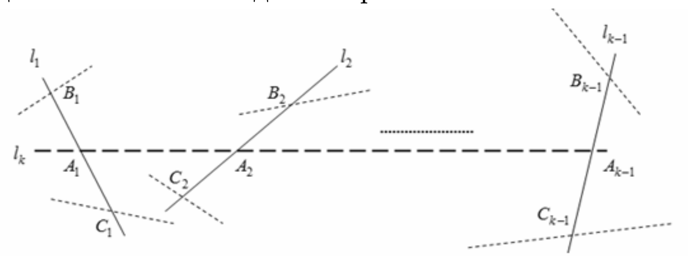


Рисунок 2. 33

Так робимо доки усі прямі не пофарбовані в один з двох кольорів. Порахуємо, скільки при цьому може бути синіх прямих. Позначимо кількість синіх та білих прямих після k–го кроку фарбування відповідно через S_k та B_k відповідно. Тоді

$$S_k = k,\ B_k \le 0+2+4+...+(2k-2) = \tfrac{2k-2}{2}\cdot k = k^2 - k.$$

Якщо усі прямі пофарбовані, то повинна виконуватись умова $S_k + B_k \ge n$, звідки $k^2 \ge n$ або $k \ge \sqrt{n}$. Таким чином кількість синіх прямих задовольняє потрібну умову.

Покажемо тепер, що при такому фарбуванні прямих не виникне обмеженої частини з повністю синьою межею. Від супротивного. Припустимо, що така частина виникла. Оскільки вона обмежена, тобто є опуклим багатокутником, то у неї принаймні 3 сторони. Нехай пряма, на якій лежить сторона цього багатокутника BC, була пофарбована у синій колір першою з усіх, що проходять через сторони (рис.2.34).

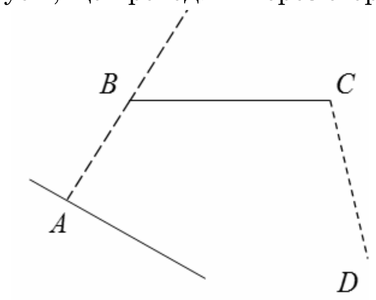


Рисунок 2. 34

З двох прямих BA та CD (точки A та D можуть співпадати) одна була пофарбованою у синій колір раніше, бо на кожному кроці фарбується у синій колір рівно одна пряма. Нехай це пряма AB. Але тоді за алгоритмом фарбування, інша сторона багатокутника, що проходить через точку C, повинна бути на цьому ж кроці пофарбована у білий колір. Таким чином не може уся межа стати синьою. Одержана суперечність завершує доведення.

ДОДАТКИ

А. ПОРАДИ УЧАСТНИКУ ОЛІМПІАДИ

1. Прочитайте умови всіх завдань і намітьте, в якому порядку ви будете розв'язувати. Врахуйте, що зазвичай завдання впорядковані по зростанню їх складності.

2. Якщо умову, на ваш погляд, можна зрозуміти різними способами, не вибирайте найзручніший для себе, а звертайтеся за роз'ясненням.

3. Якщо задача занадто легка – це підозріло, можливо, неправильно зрозуміли умову, помилились.

4. Якщо завдання не розв'язується, спробуйте його спростити (взяти менші числа, розглянути окремі випадки і т.д.) або розв'язувати її «від супротивного», або замінити числа буквами тощо.

5. Якщо неясно, чи вірне деяке твердження, то намагайтесь його по черзі то доводити, то спростовувати.

6. Не зациклюйтеся на одному завданню: іноді відривайтеся від нього і оцінюйте становище. Якщо є хоч невеликі успіхи, то можна продовжувати, а якщо думка ходить по колу, то задачу краще залишити (хоча б на час).

7. Якщо втомилися, відволічіться на кілька хвилин (подивіться на хмари або просто відпочиньте).

8. Розв'язавши задачу, відразу оформляйте розв'язання. Це допоможе перевірити його правильність і звільнить увагу для інших задач.

9. Кожен крок розв'язання треба формулювати, навіть якщо він здається очевидним. Зручно записувати розв'язок у вигляді декількох тверджень. Це допомагає при перевірці та обговоренні роботи.

10. Перед тим як здати роботу, перечитайте її «очима перевіряючих», чи зможуть вони в ній розібратися?

Б. РАДИМО ПОЧИТАТИ

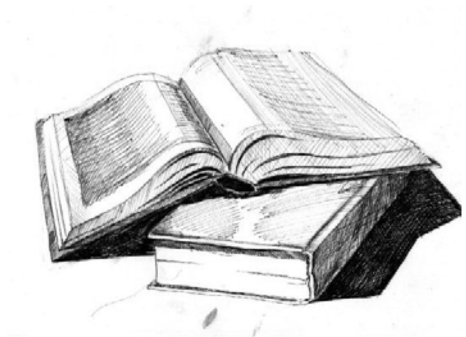
1. Математичні олімпіадні змагання школярів. 2006–2007. Анікушин А.В., Арман А.Р. та ін – К.: Літера, 2008 – 224с.
2. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2006–2007. Анікушин А.В., Арман А.Р. та ін – К.: Літера, 2008 – 135с.
3. Басанько А.М., Романенко А.О. За лаштунками підручника з математики. Збірник розвиваючих задач для учнів 5 – 7 класів. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004.
4. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: Підручник для 8-х класів з поглибленим вивченням математики. – Х .: Гімназія, 2008.
5. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: Підручник для 8-х класів з поглибленим вивченням математики. – Х .: Гімназія, 2008.
6. Готуємося до олімпіади з математики. Федак І.В. Посібник для ЗНЗ – Чернівці, 2003.
7. Ліпчевський Л.В., Остапчук У.В.Розв'язування нерівностей. Нестандартні способи доведення нерівностей: Навчально – методичний посібник – Біла Церква, КОІПОПК, 2004.
8. Гончарова І. В., Скафа О.І. Евристики в геометрії: факультативний курс: Книга для вчителя. - Х.: Вид. група „Основа", 2004.
9. Ясінський В.А. Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції. – Х.: Вид. Група „Основа", 2005.
10. Лейфура В.М. та інші. Змагання юних математиків України. 2003 рік. – Х.: Вид. Група „Основа", 2004.
11. Лейфура В.М., Мітельман І.М. та ін. Математичні олімпіади школярів України. 1991–2000. – К.:Техніка, 2003. – 541с.
12. Репета В.К., Клешня Н.О., Коробова М.В., Репета Л.А. Задачі з параметрами. – К. : Вища школа, 2006. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування.

13. В.М.Лейфура, І.М.Мітельман та ін. – Львів: Євро світ, 1999. – 128с.
14. Апостолова Г.В. Хитромудрий модуль. – К.: Факт, 2006.
15. Апостолова Г.В. Перші зустрічі з параметрами . – К.: Факт, 2004.
16. Апостолова Г.В., Ясінський В.В. Антьє і мантиса числа . – К.: Факт, 2006.
17. Международные математические олимпиады. Сост. А.А.Фомин, Г.М.Кузнецова. – М.: Дрофа, 1998. – 160с.
18. Українські математичні олімпіади. Довідник. В.А.Вишенський, О.Г.Ганюшкін та ін. – К.: Вища школа, 1993. – 415с.
19. Київські математичні олімпіади 1984–1993 рр. Збірник задач. В.А.Вишенський, М.В.Карташов та ін. – К.: Либідь, 1993. – 144с.
20. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии, в 2 ч. – М.: Наука, 1991.
21. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад – М.: Наука, 1988. – 288с.
22. Зарубежные математические олимпиады / Конягин С.В., Тоноян Г.А. и др., под ред. Сергеева И.Н. – М.: Наука, 1987. – 416с
23. Н. Х. Агаханов, Л. П. Купцов, Ю. В. Нестеренко, С. В. Резниченко, А. М. Слинько. Математические олимпиады школьников. 9 класс. М., Просвещение, 1997.
24. Л. П. Купцов, Ю. В. Нестеренко, С. В. Резниченко, А.М.Слинько. Математические олимпиады школьников. 10 класс. М., Просвещение, 1998.
25. Л. П. Купцов, Ю. В. Нестеренко, С. В. Резниченко, А. М. Слинько. Математические олимпиады школьников. 11 класс. М., Просвещение, 1999.
26. С.Л. Берлов, С.В. Иванов, К.П. Кохась. Петербургские математические олимпиады. С-Пб,М,Краснодар, Лань, 2003.
27. В. О. Бугаенко. Турниры им. Ломоносова (конкурсы по ма-тематике) | М., МЦНМО{ЧеРо. 1998.
28. Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, Ж. М. Раббот, А. Л. Тоом. Заочные математические олимпиады. | М., Наука, 1986.
29. Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. Задачи Всесоюзных матема-тических олимпиад. | М., Наука, 1988.

30. В. А. Вышенский и др. Сборник задач Киевских математи-ческих олимпиад. | Киев, Вища школа, 1984.
31. С. А. Дориченко, И. В. Ященко. LVIII московская математи-ческая олимпиада. Сборник подготовительных задач, | М., ТЕИС, 1994
32. Зарубежные математические олимпиады. Под редакцией И. Н. Сергеева. | М., Наука, 1987.
33. Избранные задачи (из журнала American Mathematical Monthly) М., Мир, 1977.
34. А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, Н. Б. Васильев | Под-готовительные задачи к LVII Московской математической олимпиаде 1994 года, 8{11 класс. | М., 1994.
35. Л. Э. Медников, А. С. Мерзляков. Математические олимпи-ады. | М., Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
36. Международные математические олимпиады. Сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. М., Дрофа, 1998.
37. Е. А. Морозова, И. С. Петраков, В. А. Скворцов. Между-народные математические олимпиады. | М., Просвещение, 1976.
38. С. Сташевич, Е. Бровкин. Польские математические олимпиады. М., Мир, 1978. Ростов-на-Дону, Март. 2000.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Математичний олімпіадний рух України. [Електронний ресурс] Режим доступу: www.matholymp.org.ua
2. Юному математику. Механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка. [Електронний ресурс] Режим доступу: http://www.mechmat.univ.kiev.ua/u/school
3. Математичні олімпіади в Києві. [Електронний ресурс] Режим доступу: http://matholymp.com.ua/
4. Сайт міжнародних олімпіад з математики. [Електронний ресурс] Режим доступу: http://imo-official.org/
5. Art of Problem Solving [Електронний ресурс] Режим доступу: http://www.artofproblemsolving.com/
6. Турнир Городов [Електронний ресурс] Режим доступу: http://www.turgor.ru/



Навчальне видання

Задачі учнівських математичних олімпіад: 2012-2013 н.р., 2013-2014 н.р.

Андрій Ярославович Бомба,
Любов Леонідівна Крока

Набір: Крока Л.Л.

Редакційно-видавничий відділ
Рівненського державного гуманітарного університету
33000, м. Рівне, вул. С. Бандери, 12